# Разрезания на треугольники

**А.В. Спивак**

Леонард Эйлер (1707–1783) был первым, кто столкнулся с последовательностью, ныне носящей имя Эжена Шарля Каталана (1814–1894). Он спросил себя, сколькими способами можно выпуклый $n$-угольник разрезать на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Ответ для $n = 3$ тривиален: никаких диагоналей проводить не надо. В четырёхугольнике можно провести любую из двух диагоналей, так что способов два. В пятиугольнике — из любой вершины две диагонали, 5 способов.

При $n = 6$ — первый не вполне очевидный ответ: 14 способов (рис. 1); чтобы не запутаться, сторона $BC$ выделена и отдельно нарисованы разрезания, в которых к ней примыкают соответственно треугольники $BCA$, $BCF$, $BCE$ и $BCD$.

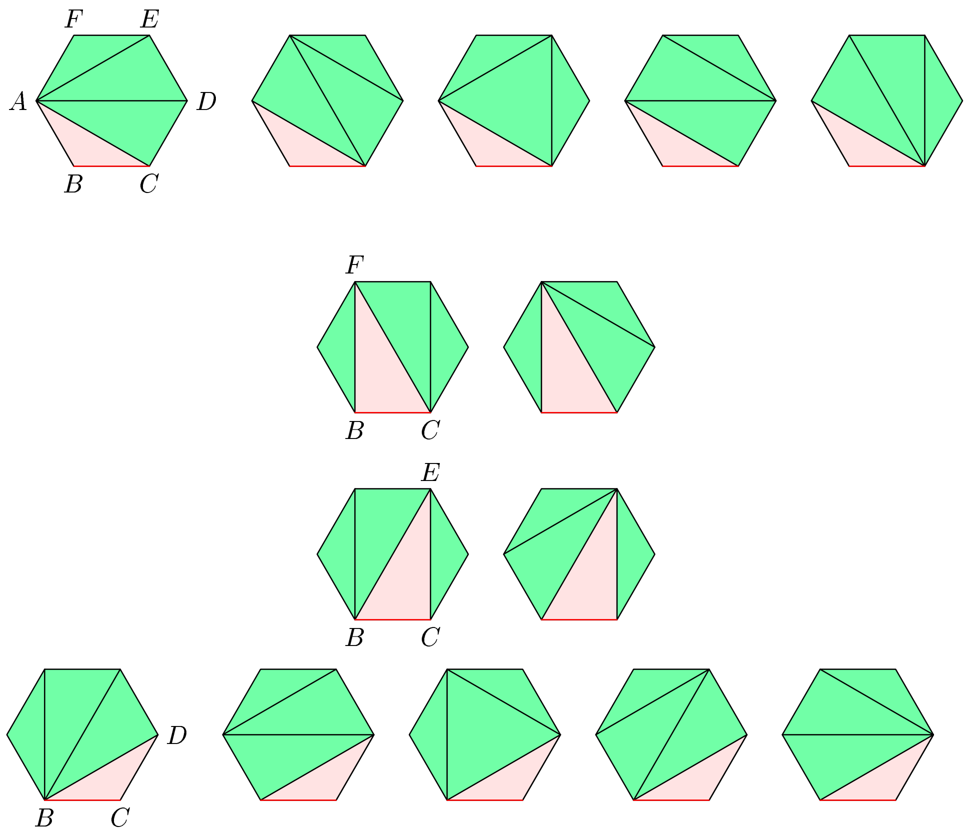


*Рисунок 1*

В статье «Числа Каталана» («Квант», номер 3 за 2004 год) приведено много других определений этой последовательности и тремя способами выведена явная формула

$$P_n = \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2} \tag{*}$$

для количества $P_n$ разрезаний выпуклого $n$-угольника на треугольники. В этой формуле $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ — произведение первых $n-1$ натуральных чисел, а $(2n-5)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-5)$ — произведение первых $n-3$ нечётных натуральных чисел. Например, $P_3 = \frac{1!!}{2!} \cdot 2^1 = 1$ и $P_4 = \frac{3!!}{3!} \cdot 2^2 = 2$.

Предлагаю вашему вниманию довольно простое доказательство формулы ($*$). Его основная идея содержится в письме Ламэ Лиувиллю, которое было опубликовано в журнале «Journal de math. pures et appl.» в 1838 году.

Рассмотрим выпуклый $n$-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. Легко доказать, что количество диагоналей равно $n-3$.

**Упражнения**

**1.** *Докажите это утверждение по индукции.*

**2.** *Докажите по индукции, что количество треугольников разбиения равно* $n-2$.

**3.** *Подсчитывая количества сторон треугольников, выведите формулу для количества диагоналей из формулы для количества треугольников.*

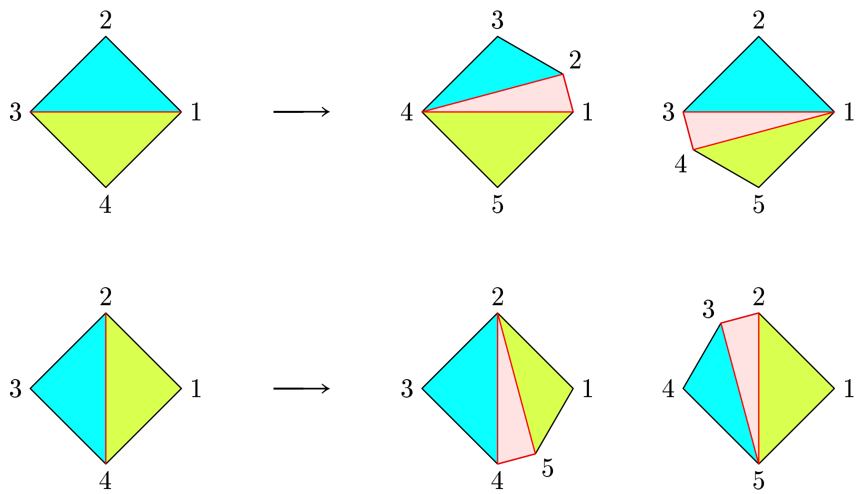


*Рисунок 2*

Теперь — основная идея. Рассмотрим выпуклый $n$-угольник, разрезанный на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника. Любая из $n-3$ диагоналей, осуществляющих это разрезание, может двумя способами, как показано на рисунках 2 и 3 для $n=4$ и $n=5$ соответственно, превратиться в треугольник и тем самым превратить разрезание $n$-угольника в разрезание $(n+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$.

Таким образом $P_n$ разрезаний выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ превращаются в $2(n-3)P_n$ разрезаний выпуклого $(n+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$. На каждом таком разрезании выделена одна сторона (возникшая при «раздувании» диагонали в треугольник и выделенная на рисунках 2 и 3 красным цветом). Любая сторона, кроме $A_{n+1}A_1$, может быть выделенной.

Посмотрим на это с другой точки зрения. Пусть в выпуклом $(n+1)$-угольнике $ABCD\ldots$ выделена сторона $BC$; выясним, сколько существует разрезаний на треугольники (как всегда, диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника). По определению, способов разрезать $(n+1)$-угольник всего $P_{n+1}$. Однако не во всех таких способах сторона $BC$ может быть выделенной: не годятся те способы, когда одним из треугольников, на которые разрезан $(n+1)$-угольник, является треугольник $ABC$ или $BCD$. Отрезая от $(n+1)$-угольника треугольник $ABC$, мы получаем выпуклый $n$-угольник; для него по определению существует $P_n$ разрезаний. То же самое происходит при отрезании от $(n+1)$-угольника треугольника $BCD$: получаем выпуклый $n$-угольник, для которого количество разрезаний равно $P_n$.

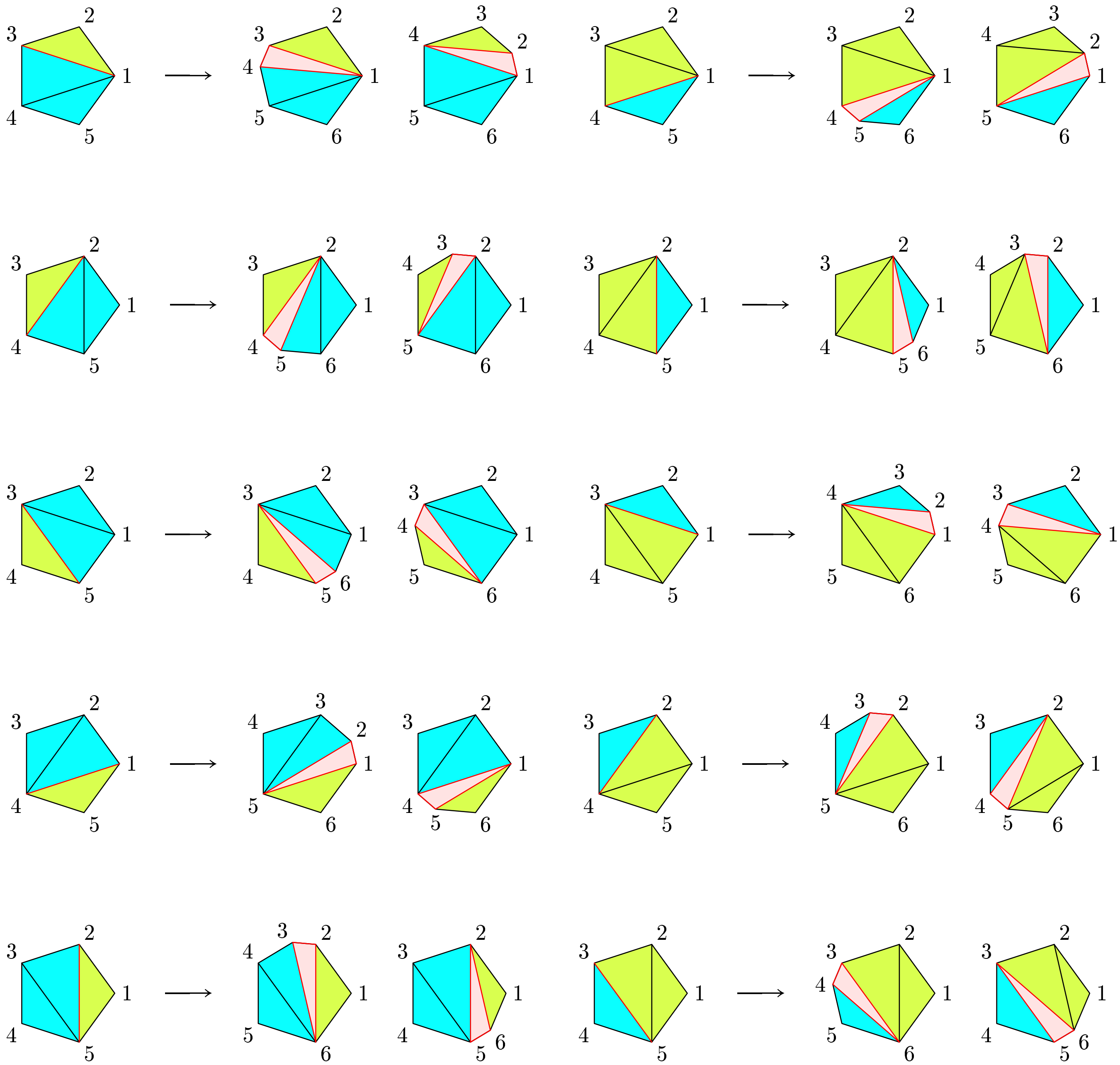

*Рисунок 3*

Итак,

$$(2n-6)P_n = n(P_{n+1} - 2P_n),$$

откуда $nP_{n+1} = (4n-6)P_n$. Следовательно, если для некоторого натурального $n$ верна формула (*), то

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot \frac{(2n-5)!!}{(n-1)!} \cdot 2^{n-2} = \frac{(2n-3)!!}{n!} \cdot 2^{n-1},$$

так что формула (*) верна в таком случае и для следующего за числом $n$ натурального числа $n+1$. Индукционный переход обоснован, формула (*) доказана!

## Решения упражнений

**1.** База очевидна: для разрезания треугольника не нужно ни одной диагонали, а $3-3=0$. Пусть $n$-угольник разрезан диагональю на $k$-угольник и $m$-угольник, причём для чисел $k$ и $m$ утверждение о количестве диагоналей верно. Тогда $k+m=n+2$ и количество диагоналей, разбивающих $n$-угольник, равно $(k-3)+(m-3)+1=k+m-5=n-3$.

**2.** Аналогично первому упражнению, только вместо формул $3-3=0$ и $(k-3)+(m-3)+1=k+m-5=n-3$ используем формулы $3-2=1$ и $(k-2)+(m-2)=k+m-4=n-2$.

**3.** Пересчитывая у каждого из треугольников разбиения его стороны, получаем число $3(n-2)=3n-6$. Поскольку каждая из $n$ сторон многоугольника входит в состав только одного треугольника, то на долю диагоналей остаются $(3n-6)-n=2n-6$ сторон. Учитывая, что каждая из диагоналей, участвующих в разрезании $n$-угольника на треугольники, является общей стороной двух треугольников, получаем количество диагоналей, по которым проведены разрезы: $(2n-6):2=n-3$.