Разрезания металлического прямоугольника

С. Дориченко, М. Прасолов, М. Скопенков

April 9, 2009

Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты? Когда из подобных друг другу прямоугольников можно составить квадрат? Мы ответим на эти геометрические вопросы. Главную роль в наших рассуждениях будет играть физическая интерпретация. Для ответа на первый вопрос нам потребуются электрические цепи постоянного тока, а на второй — переменного.

ЧАСТЬ I. Разрезания прямоугольника на квадраты.

Начнём с примера.

Прямоугольник размером $a \times b$, где a и b — целые числа, легко разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов. Разумеется, это верно и для любого подобного ему прямоугольника. Значит, прямоугольник с рациональным отношением сторон разрезается на равные квадраты.

А если разрезать прямоугольник на квадраты, которые не все одинаковы? Каким может быть отношение его сторон? Оказывается, ответ тот же самый:

Теорема Дена. *Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.*

Эту теорему открыл Макс Ден в 1903 году. Оригинальное рассуждение Дена было довольно сложно. Впоследствии появились более простые доказательства, мы приведем одно из них[1].

Как искать отношение сторон прямоугольника.

Итак, нам нужно научиться находить отношение сторон прямоугольника, разрезанного на квадраты. Будем рассматривать разрезания не только на квадраты, но и на произвольные прямоугольники, отношения сторон которых считаются известными. Будем считать, что стороны всех рассматриваемых прямоугольников параллельны координатным осям, то есть либо *вертикальны*, либо *горизонтальны*[2]. Под *отношением сторон* прямоугольника мы всегда понимаем отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

Начнем с простейших примеров.

Пример 1. Прямоугольник с отношением сторон R разделён вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 1 а). Тогда $R = R_1 + R_2$. Действительно, пусть вертикальная сторона большого прямоугольника равна I. Тогда горизонтальные стороны меньших прямоугольников равны IR_1 и IR_2. Значит, $R = (IR_1 + IR_2)/I = R_1 + R_2$.

Пример 2. Прямоугольник с отношением сторон R разделён горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 1 б). Тогда $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Действительно, пусть без ограничения общности горизонтальная сторона большого прямоугольника равна 1. Тогда вертикальные стороны меньших прямоугольников равны $1/R_1$ и $1/R_2$. Значит,

$$R = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

---

[1] Это доказательство принадлежит Р.Л. Бруксу, К.А.Б. Смиту, А.Г. Стоуну и У.Т.Татту. Еще одно доказательство можно прочитать в книге: И.М. Яглом "Как разрезать квадрат?" М.: Наука, 1968.

[2] Ясно, что если прямоугольник разрезан на прямоугольники, то стороны меньших прямоугольников параллельны сторонам большого (докажите!)

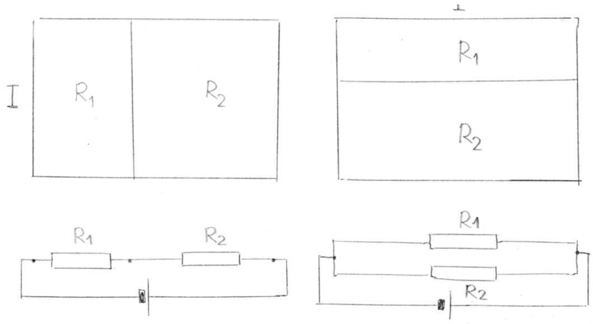

Figure 1: Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

Покажем на примере, как искать отношение сторон прямоугольника в общей ситуации.

Пример 3. Имеется прямоугольный шкаф с квадратными полками, изображённый на рисунке 2. Найдем отношение высоты шкафа к его ширине.

Figure 2: Каково отношение высоты этого шкафа к его ширине?

Занумеруем квадраты (полки) как показано на рис. 3. Можно считать, что горизонтальная сторона большого прямоугольника (шкафа) равна 1. Вертикальную сторону большого прямоугольника обозначим через I, тогда искомое отношение сторон равно $R = 1/I$. Сторону квадрата номер k обозначим через I_k.

К левой стороне большого прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $I = I_2 + I_3 + I_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $I_3 = I_1 + I_4$. Аналогично $I_6 + I_8 = I_7$, $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$, $I_4 + I_5 = I_9$. Сформулируем наше наблюдение в общем виде:

Условие вертикальной стыковки. *Для каждого вертикального разреза (а также вертикальной стороны большого прямоугольника) сумма вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу слева, равна сумме вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих справа.*

Глядя на схему разрезания, можно написать аналогичные уравнения, описывающие примыкание квадратов друг к другу горизонтальными сторонами:

Условие горизонтальной стыковки. *Для каждого горизонтального разреза (а также горизонтальной стороны большого прямоугольника) сумма горизонтальных сторон прямоуголь-*

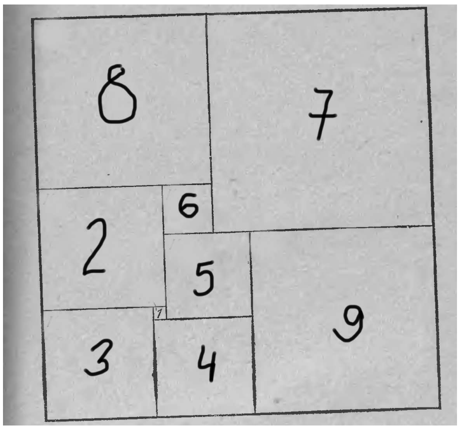

Figure 3: Разрезание прямоугольника на 9 неравных квадратов

ников, примыкающих к разрезу сверху, равна сумме горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих снизу.

Из этого условия получаем равенства: $I_3+I_4+I_9=1$, $I_4=I_1+I_5$, $I_1+I_3=I_2$, $I_5+I_9=I_6+I_7$, $I_2+I_6=I_8$.

Итак, нахождение отношения сторон прямоугольника сводится к решению системы уравнений, в нашем случае:

$$\begin{gathered} I=I_2+I_3+I_8, \quad I_3=I_1+I_4, \quad I_6+I_8=I_7, \quad I_1+I_2=I_5+I_6, \quad I_4+I_5=I_9, \\ I_3+I_4+I_9=1, \quad I_4=I_1+I_5, \quad I_1+I_3=I_2, \quad I_5+I_9=I_6+I_7, \quad I_2+I_6=I_8. \end{gathered}$$

Как решать систему линейных уравнений.

Напомним, что *линейным уравнением* называется уравнение вида $R_1I_1+R_2I_2+\dots+R_nI_n=U$, где $I_1,I_2,\dots,I_n$ — неизвестные, а $U,R_1,R_2,\dots,R_n$ — заданные числа. Уравнения, получающиеся переносом некоторых слагаемых в другую часть, также будем считать линейными.

Проиллюстрируем известный алгоритм Гаусса решения системы линейных уравнений на нашем примере. Наша цель — преобразовать систему так, чтобы каждая неизвестная участвовала ровно в одном уравнении. Для неизвестной I это уже выполнено — она содержится только в первом уравнении.

Перейдем ко второму уравнению. В нем неизвестная I_3 выражена через I_1 и I_4. Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную I_3 — в первое, шестое и восьмое. Получим систему:

$$\begin{gathered} I=I_2+I_1+I_4+I_8, \quad I_3=I_1+I_4, \quad I_6+I_8=I_7, \quad I_1+I_2=I_5+I_6, \quad I_4+I_5=I_9, \\ I_1+2I_4+I_9=1, \quad I_4=I_1+I_5, \quad 2I_1+I_4=I_2, \quad I_5+I_9=I_6+I_7, \quad I_2+I_6=I_8. \end{gathered}$$

Эта система равносильна исходной. Но теперь неизвестная I_3 участвует только во втором уравнении.

Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $I_7=I_6+I_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую I_7 только в третьем уравнении:

$$\begin{gathered} I=I_2+I_1+I_4+I_8, \quad I_3=I_1+I_4, \quad I_6+I_8=I_7, \quad I_1+I_2=I_5+I_6, \quad I_4+I_5=I_9, \\ I_1+2I_4+I_9=1, \quad I_4=I_1+I_5, \quad 2I_1+I_4=I_2, \quad I_5+I_9=2I_6+I_8, \quad I_2+I_6=I_8. \end{gathered}$$

Будем продолжать таким же образом дальше. Каждый раз будем выражать одну из неизвестных в очередном уравнении через остальные. Будем подставлять полученное выражение в другие уравнения системы. В полученной системе выбранная неизвестная будет присутствовать только в одном уравнении. После этого переходим к следующему уравнению и т. д. [3]

В итоге мы получим систему "уравнений" (проверьте!):

$$I = 33/32, \quad I_3 = 9/32, \quad I_7 = 1/2, \quad I_1 = 1/32, \quad I_4 = 1/4,$$
$$I_9 = 15/32, \quad I_5 = 7/32, \quad I_2 = 5/16, \quad I_8 = 7/16, \quad I_6 = 1/8.$$

Тем самым решение исходной системы найдено. Итак, в примере 3 отношение сторон большого прямоугольника равно $R = 1/I = 32/33$. Значения неизвестных $I_1, \dots, I_9$ — это стороны квадратов. Тем самым мы получили пример разрезания прямоугольника на попарно различные квадраты.

Задача 1. ("Квант", N6 (2008), стр. 32.) Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых — целые числа.

Задача 2. Прямоугольник разделён на пять прямоугольников с отношениями сторон $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 3$ так, как показано на рисунке 4 слева. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

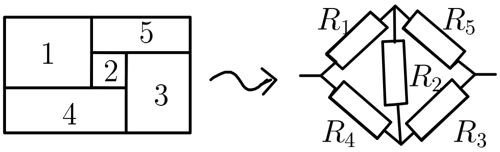

Figure 4: Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

Посмотрим, что дает алгоритм Гаусса в общем случае. Принципиально возможны две ситуации.

Первый случай. Возможно (как в разобранном примере), что *каждую* неизвестную мы выбирали на каком-то шаге и выражали через остальные. В этом случае решение системы единственно. Заметим, что на каждом шаге коэффициенты уравнений системы выражаются через коэффициенты уравнений предыдущей (а значит, исходной) системы с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления. В частности, это означает, что если все коэффициенты рациональны, то и решение системы задается рациональными числами.

Второй случай. Возможно, что некоторую неизвестную I_k мы не выражали ни на каком шаге алгоритма. Например, алгоритм приводит систему уравнений

$$I_1 + I_2 = 0, \quad I_1 + I_3 = 1; \text{ к виду } I_1 = -I_2, \quad I_3 = 1 + I_2.$$

При этом неизвестную I_2 мы "не успели" выразить через остальные. В этом случае для каждого выбора значений неизвестных I_k остальные неизвестные находятся из системы. Таким образом мы получим бесконечно много решений. Например, в нашем примере для каждого числа t тройка $I_1 = -t, I_2 = t, I_3 = 1 + t$ является решением системы.

Мы получили следующую теорему:

Теорема о решении системы. *Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.*

Итак, для доказательства теоремы Дена нам остается показать, что система уравнений, построенная по условиям стыковки, имеет единственное решение. Это мы сделаем с помощью физической интерпретации.

[3]Вообще говоря, возможно, что после нашей подстановки все неизвестные в некотором уравнении сократятся, и оно примет вид $0 = 0$. В этом случае выбросим его из системы. Если же в результате подстановки получилось уравнение, в котором правая часть — ненулевое число, а все коэффициенты в левой части нулевые, то это означает, что наша система не имеет решений. Иными словами, картинке вроде изображенной на рис. 3 не соответствует никакое разрезание прямоугольника на квадраты.

Задача 3. Докажите, что если система линейных уравнений имеет единственное решение, то в этом решении каждая неизвестная выражается через коэффициенты уравнений с помощью четырёх арифметических действий.

Физическая интерпретация.

Для читателя, знакомого с физикой, полученные в примерах 1 и 2 выражения напомнят формулы для сопротивления цепи из последовательно (параллельно) соединённых резисторов. Сейчас мы дадим объяснение этой аналогии, обратившись к теории электрических цепей.

Представим себе проводящую электрический ток тонкую прямоугольную пластинку, разбитую на прямоугольные пластинки поменьше. Вертикальные стороны пластинки соединим с полюсами батарейки. Будем считать, что маленькие пластинки, из которых состоит большая пластинка, строго изолированы одна от другой вдоль горизонтальных разрезов, осуществляющих разбиение пластинки; вдоль же вертикальных линий пластинки стыкуются. Каждая маленькая прямоугольная пластинка будет играть роль резистора. Как известно из физики, её сопротивление пропорционально отношению её длины к площади её поперечного сечения, то есть отношению сторон прямоугольной пластинки разбиения. Общее сопротивление полученной схемы равно сопротивлению большой пластинки, что пропорционально отношению сторон прямоугольной пластинки.

Мы видим, что отношение сторон пропорционально сопротивлению, а значит, можно выразить отношение сторон прямоугольника через отношения сторон прямоугольников разбиения формулой для общего сопротивления. Однако, мы подсчитали общее сопротивление с помощью физических рассуждений. Мы построим *математическую модель* наблюдаемого явления и покажем, как выглядят разрезания прямоугольника с точки зрения электрических цепей. Так, например, единственность системы уравнений, построенной по правилам стыковки, означает, что электрический ток в цепи распределяется единственным образом.

Мы будем считать, что *цепь* — это некоторый граф, нарисованный на плоскости, причём одно из его рёбер — это батарейка, а остальные — резисторы. У батарейки указаны полярность и напряжение, а у резисторов указаны сопротивления.

Теперь сопоставим разрезанию прямоугольника электрическую цепь как математический объект. Объясним как это сделать (на рисунках 1, 2, 4, 5 приведены примеры). Каждой вертикальной линии разреза и вертикальным сторонам большого прямоугольника сопоставлена точка, или "клемма" электрической цепи. "Клемма" лежит на соответствующем ей отрезке.

Любой маленький прямоугольник ограничен слева и справа двумя вертикальными отрезками. В электрической цепи его изображением служит резистор, соединяющий две точки. Одна из этих точек изображает левую сторону маленького прямоугольника, а другая — правую. Сопротивление этого резистора полагается равным отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной. "Клеммы", соответствующие вертикальным сторонам большого прямоугольника, соединяются с разными полюсами батарейки, напряжение которой численно равно длине горизонтальной стороны разрезаемого прямоугольника. Нужная нам электрическая цепь построена. Внимательный читатель заметил бы, что построенная нами цепь — это в точности цепь из физического наблюдения выше.

Задача 4. Попробуйте доказать, что каждая электрическая цепь, нарисованная на плоскости, получается указанным образом из некоторого разрезания прямоугольника, в котором, возможно, некоторые прямоугольники разрезания вырождаются в отрезки или точки.

Как считать сопротивление электрической цепи[4].

Мы рассматриваем лишь плоские электрические схемы, хотя всё переносится с небольшими изменениями на общий случай.

Немного поговорим о физике. Напомним, что *сопротивление* резистора — это характеристика самого резистора, не зависящая от цепи, в которую он входит. Мы считаем источник

[4] На эту тему см. статьи А. Варламова "Правила Кирхгофа" и О. Ляшко "Почему не уменьшится сопротивление" в Кванте N1 (1985).

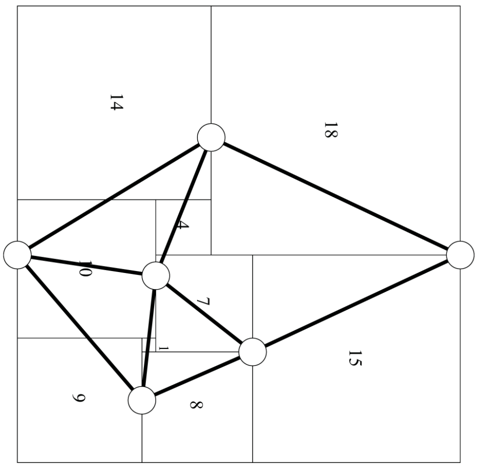

Figure 5: Физическая интерпретация

тока идеальным, то есть обладающим нулевым внутренним сопротивлением, тогда *напряжение* источника тока (батарейки) также не зависит от подключаемой цепи. Когда цепь, содержащая источник тока, замкнута, то в ней течёт электрический ток. В каждом элементе цепи его можно характеризовать направлением и величиной (*силой тока*) (в некоторых элементах цепи она может быть нулевой). Сила тока, протекающего через цепь, пропорциональна напряжению источника и величина, обратная коэффициенту пропорциональности называется *общим сопротивлением* цепи. Данное соотношение было открыто экспериментально и известно как закон Ома. Ток измеряется в амперах, напряжение в Вольтах, а сопротивление в Омах.

Из школьного курса физики известны следующие правила вычисления общего сопротивления (сравните их с Примерами 1 и 2.)

Пример 1'. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *последовательно* (рис. 1 справа внизу). Тогда сопротивление полученной цепи равно $R_1 + R_2$.

Пример 2'. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *параллельно* (рис. 1 слева внизу). Тогда сопротивление полученной цепи вычисляется по формуле $\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

Не любая электрическая цепь "сводится" к последовательно и параллельно соединенным резисторам (например, см. цепь на рис. 4 справа).

Вернёмся к математике. В цепи появился электрический ток. Как было сказано, ток в резисторе определяется направлением и величиной (*силой тока*) (такие объекты называют *векторами*). С точки зрения математики, ток в цепи — это просто набор чисел (сил тока в каждом из резисторов и батарейке) и набор стрелок на каждом резисторе и батарейке, указывающих направление тока. *Напряжение* на резисторе — это произведение силы тока на сопротивление. *Общее сопротивление* цепи — это отношение напряжения источника тока к силе тока через этот источник.

Покажем на примере рис. 5, как искать сопротивление "плоской" цепи в общем случае. Сопротивления всех резисторов в цепи считаем равным 1 Ом, напряжение батарейки — равным 1 Вольт.

Произвольным образом припишем току в каждом резисторе одно из двух направлений (мы можем ошибиться с выбором направления, но тогда у нас в итоге для силы тока получится правильный ответ со знаком минус). В рассматриваемом примере мы направили ток на всех резисторах слева направо. В батарейке направим ток от "минуса" к "плюсу"[5]. Обозначим через $I_1, I_2, \dots, I_9$ — неизвестные силы тока в резисторах, а через I — неизвестную силу тока в

[5]Это может смутить читателя, знающего, что "ток в цепи идет от плюса к минусу". Ток в *цепи* действительно идет в этом направлении, а вот в самой *батарейке* — как раз наоборот!

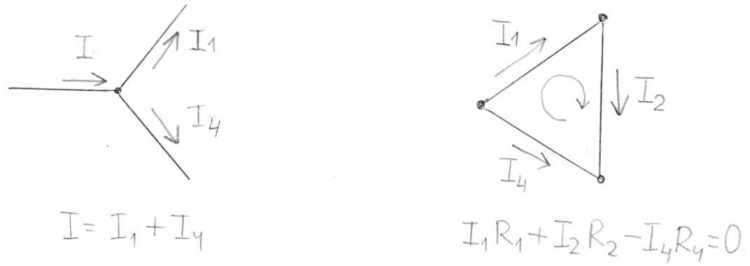

Figure 6: Правила Кирхгофа

батарейке. Составим уравнения на числа $I_1, I_2, \ldots, I_9$, пользуясь следующими правилами.[6]

Первое правило Кирхгофа. *В каждом узле сумма входящих токов равна сумме выходящих (рис.6 слева).*

Получаем уравнения: $I = I_2 + I_3 + I_8, I_3 = I_1 + I_4, I_6 + I_8 = I_7, I_1 + I_2 = I_5 + I_6, I_4 + I_5 = I_9$.

Назовём *контуром* цепочку резисторов, получающуюся при обходе против часовой стрелки границы любой части, на которые электрическая цепь делит плоскость (рис.6 справа).

Второе правило Кирхгофа. *Для любого контура алгебраическая сумма напряжений равна нулю (рис.6.б). При этом напряжение на резисторе, попавшем в контур, берется со знаком "+", если выбранное направление силы тока на резисторе совпадает с направлением обхода контура, и со знаком "−" — иначе. А для батарейки — наоборот.*

Получаем: $I_3 + I_4 + I_9 - 1 = 0, I_4 - I_1 - I_5 = 0, I_1 + I_3 - I_2 = 0, I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0, I_2 + I_6 - I_8 = 0$.

Оказывается, выписанных уравнений всегда будет достаточно, чтобы найти все силы тока (а следовательно, и общее сопротивление цепи):

Теорема единственности. *Система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, в которой силы тока — неизвестные, а напряжение батарейки и сопротивления резисторов известны, имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что при данных общем напряжении и сопротивлениях резисторов система уравнений Кирхгофа имеет два различных решения. Рассмотрим разность этих решений (то есть положим силы тока равными разностям соотвествующих сил тока для двух разных решений). Легко видеть, что разность решений удовлетворяет правилам Кирхгофа для цепи, в которой резисторы имеют такие же сопротивления, а напряжение источника тока равно нулю.

Значит, нам достаточно показать, что если во втором правиле Кирхгофа напряжение батарейки считается равным нулю, то система уравнений Кирхгофа имеет только нулевое решение (то есть, при нулевом напряжении тока нет[7]). Предположим, что ненулевое решение есть. Отметим на каждом резисторе с ненулевой силой тока направление тока так, чтобы сила тока (в выбранном направлении) стала положительной. Начнём путь в узле, который соединён с резистором с ненулевой силой тока, и пойдём по направлению тока. В каждый узел пути мы приходим по резистору с положительной силой тока. Но сумма входящих токов равна сумме выходящих, поэтому для каждого узла пути есть соединённый с ним резистор, в котором сила тока положительна, и ток направлен от этого узла. Поэтому мы всегда можем продолжить наш путь. Значит, мы получим цикл, не содержащий батарейку и на каждом резисторе которого напряжение положительно. По задаче 5 имеем противоречие.

Задача 5. Докажите, что если во втором правиле Кирхгофа "любой контур" заменить на "любую замкнутую цепочку", то мы получим систему уравнений, эквивалентную предыдущей.

[6] Правила Кирхгофа подтверждаются экспериментально. С точки зрения математики это аксиомы математической модели электрической цепи.

[7] Это, конечно, очевидно из физических соображений. Но нам нужно, чтобы именно *система уравнений Кирхгофа* имела только нулевое решение. Отсутствие у нее "посторонних" ненулевых решений ни из каких простых физических соображений не следует и нужно доказывать.

Figure 7: Контуру соответствует горизонтальный разрез

Задача 6. Пусть в первой электрической цепи выкинули некоторый резистор, а во второй цепи выкинули батарейку и соединили цепи по свободным узлам. Причём сопротивление выкинутого резистора совпадает с общим сопротивлением второй цепи. Докажите, что в оставшейся части первой цепи токи не изменились, и общие сопротивления полученной цепи и первой цепи совпадают.

Замечание. Легко проверить, что общее сопротивление не зависит от выбора направлений токов в начале приведенного алгоритма: если поменять направление тока в одном из резисторов, мы получим из системы уравнений такое же численное значение силы тока, но с противоположным знаком.

Читатель, конечно, заметил, что для рассматриваемого примера система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, идентична системе, построенной ранее по условиям стыковки. Это проявление общей закономерности.

Связь цепей с разрезаниями.

Мы сопоставили разрезанию прямоугольника электрическую цепь. Покажем, что система уравнений на длины сторон прямоугольников, построенная по условиям стыковки для разрезания, совпадает с системой уравнений на силы тока, построенной по правилам Кирхгофа для цепи. Положим силу тока на резисторе численно равной вертикальной стороне соответствующего резистору прямоугольника. Выберем направление тока в каждом резисторе от точки, соответствующей левой стороне прямоугольника, к точке, сопоставленной правой стороне того же прямоугольника.

Рассмотрим первое правило Кирхгофа. Зафиксируем вертикальный разрез и соответствующий ему узел. Согласно выбранной ориентации токов, входящие в узел токи соответствуют прямоугольникам, примыкающим к разрезу слева, а выходящим из узла — прямоугольники справа. Значит, первое правило Кирхгофа в этом узле для токов совпадает с правилом вертикальной стыковки в соответствующем вертикальном разрезе.

Рассмотрим второе правило Кирхгофа. Напряжение на резисторе по определению — произведение силы тока на сопротивление. Напомним, что сопротивление резистора в схеме мы положили численно равным отношению длин горизонтальной стороны к вертикальной соответствующего прямоугольника. Значит, напряжение на резисторе в нашей схеме численно равно длине горизонтальной стороны соответствующего резистору прямоугольника.

Возьмем любой контур в нашей цепи. Самый левый узел этой цепи (обозначим его m) соответствует некоторому вертикальному разрезу. К этому разрезу примыкают справа два прямоугольника (скажем, A и B), соприкасающиеся горизонтальными сторонами (см. рис. 7) — те два прямоугольника, которые соответствуют выходящим из узла m двум резисторам контура. Горизонтальный разрез h, по которому примыкают друг к другу A и B, продолжается вправо и в каком-то месте впервые встречает еще один вертикальный разрез v (пересекающий h). Верхняя часть нашего контура тогда соответствует прямоугольникам, примыкающим к h сверху, а нижняя — прямоугольникам, примыкающим к h снизу; эти части сомкнутся в узле, отвечающем разрезу v. Мы получили некоторый контур.

Тогда второе правило Кирхгофа означает просто, что суммы длин горизонтальных сторон тех прямоугольников, которые примыкают к разрезу h сверху, и тех, которые примыкают снизу, одинаковы — это в точности условие горизонтальной стыковки.

Итак, правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки.

Мы готовы доказать теорему Дена. Пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Будем считать его горизонтальную сторону равной 1. Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую этому разрезанию. По теореме единственности система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа для нее, имеет единственное решение. По теореме о решении системы это решение состоит из рациональные чисел. В частности, величина тока через источник рациональна. Эта величина численно равна вертикальной стороне прямоугольника. Теорема доказана.

О Формулах для сопротивления цепи.

Примеры 1' и 2' — частные случаи формул для сопротивления цепи. Покажем, что подобную формулу можно записать для произвольной цепи.

Теорема существования. *Система уравнений Кирхгофа имеет решение.*

Доказательство. Уравнения Кирхгофа — линейные, значит, можем применить алгоритм Гаусса, описанный в доказательстве теоремы о решении системы.

Заметим, что если сложить все уравнения из первого правила Кирхгофа, то получится уравнение $0 = 0$. Действительно, каждый ток встречается в двух уравнениях, в одном — как входящий, а в другом — как выходящий, поэтому в сумме он сократится. Значит, одно из этих уравнений можно выбросить, потому что оно следует из остальных. Число уравнений, получаемых по первому правилу Кирхгофа, равно числу узлов в схеме, а по второму — числу контуров. Количество неизвестных равно количеству резисторов в схеме. А теперь вспомним формулу Эйлера для плоских графов: число вершин минус число рёбер плюс число граней равно двум. Число рёбер равно числу резисторов, что равно числу неизвестных. Число вершин равно числу узлов, что равно числу уравнений из первого правила Кирхгофа, считая то уравнение, которое мы выкинули. Число граней на единицу больше числа контуров, что равно числу уравнений из второго правила Кирхгофа. Значит, по формуле Эйлера, число уравнений в системе равно количеству неизвестных.

Согласно анализу алгоритма в общем случае (из доказательства теоремы о решении системы), нам нужно исключить появление уравнения с нулевой левой частью и ненулевой правой. Положим сначала общее напряжение равным нулю. Тогда правые части всех уравнений будут равны нулю, и в этом случае система имеет единственное решение (нулевое). Значит, результат работы алгоритма – это система уравнений, каждое из которых утверждает, что некоторая неизвестная равна нулю. Значит на каждом шаге никакое уравнение не принимало вид $0 = 0$, потому что иначе мы бы его выкинули, и число уравнений уменьшилось. Теперь пусть напряжение произвольно. Тогда на каждом шаге единственным отличием будет то, что правые части могут содержать общее напряжение с некоторым коэффициентом, и в конце мы получаем искомые выражения для неизвестных сил тока.

Следующая теорема следует из теорем существования, единственности и задачи 3:

Теорема о сопротивлении цепи. *Пусть дана электрическая цепь, состоящая из резисторов и источника постоянного тока. Тогда существует формула, в которой участвуют только операции сложения, вычитания, умножения и деления, выражающая сопротивление цепи через сопротивления отдельных резисторов.*

Иными словами, сопротивление цепи есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от сопротивлений отдельных резисторов.

Отметим два простых свойства общего сопротивления цепи.

Заметим, что если домножить все сопротивления резисторов на ненулевое число c, то общее сопротивление цепи домножиться на число c. Действительно, поделим на c силы тока, найденные из правил Кирхгофа. Тогда полученный набор токов удовлетворяет правилам Кирхгофа для цепи, у которой сопротивления всех резисторов домножены на число c, а напряжение источника осталось прежним. Значит, по теореме единственности этот набор является единственным решением системы уравнений Кирхгофа. Но тогда в частности общий ток тоже поделится на c, поэтому общее сопротивление умножится c.

Заметим также, что общее сопротивление неотрицательно. Действительно, пусть общее сопротивление равно $-R$, где $R > 0$. Тогда соединим последовательно нашу цепь с резистором с сопротивлением R. Общее сопротивление станет равным нулю (по задаче 6), что противоречит тому, что напряжение источника ненулевое.

ЧАСТЬ II. Разрезания квадрата на подобные прямоугольники.

Попытаемся теперь найти ответ на второй вопрос, сформулированный в начале статьи. С учетом соглашения, сделанного перед примерами 1–3, он звучит так: *при каком R квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон R и $\frac{1}{R}$?*

Ясно, что при рациональном R это сделать можно (придумайте, как). По аналогии с теоремой Дена можно было бы предположить, что при иррациональном R требуемого разрезания не существует.

Однако здесь ситуация интереснее.

Пример 4. Рассмотрим разрезание квадрата, изображенное на рисунке 8. Найдем отношение сторон R прямоугольников разрезания. Пусть сторона квадрата равна 1. Тогда последовательно находим (см. рис.) $AB = 1/3$, $AC = R/3$, $CD = 1 - R/3$, $DE = R - R^2/3$. С другой стороны, $DE = 1/2$, значит, $R - R^2/3 = 1/2$. Решая квадратное уравнение, находим $R = (3 \pm \sqrt{3})/2$ — иррациональное число.

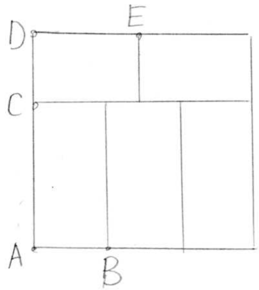

Figure 8: Разрезание квадрата на 5 подобных прямоугольников

Следующая теорема существенно ограничивает множество чисел R, для которых возможно требуемое разрезание.

Теорема 1. *Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и $\frac{1}{R}$. Тогда R — корень ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.*

Докажем эту теорему. Рассмотрим некоторое разрезание. Растянем картинку в R раз по горизонтали. Получим прямоугольник с отношением сторон R, разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон R^2. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Согласно теореме о сопротивлении цепи число R можно выразить через числа 1 и R^2, пользуясь только четырьмя арифметическими действиями. Это означает, что найдутся два ненулевых многочлена $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, такие что $R = \frac{p(R^2)}{q(R^2)}$. Значит, $q(R^2) \cdot R - p(R^2) = 0$. Получаем, что число R — корень многочлена $q(x^2) \cdot x - p(x^2)$. Последний многочлен имеет целые коэффициенты. Он ненулевой, так как многочлены $p(x^2)$ и $q(x^2)$ — ненулевые, причём в многочлен $p(x^2) \cdot x$ переменная x входит только в нечётной степени, а в многочлен $q(x^2)$ — только в чётной. Теорема 1 доказана.

Но эта теорема не дает полного ответа на вопрос о том, какие отношения R возможны. Существуют числа R, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, для которых требуемое разрезание невозможно.

Задача 7. Покажите, что квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приведем ключевой пример такого числа.

Предложение 1. *Квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $1 + \sqrt{2}$ и $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$*

Лемма. *Пусть $1 + \sqrt{2}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами. Тогда $1 - \sqrt{2}$ — тоже корень этого многочлена.*

Докажем лемму. Подставив в наш многочлен $P(x)$ с целыми коффициентами вместо x число $1 + \sqrt{2}$, получим выражение вида $m + \sqrt{2}n$, где m и n — целые числа. Должны получить 0, и так как $\sqrt{2}$ иррационально, имеем $n = 0$ и $m = 0$. Если же мы подставим в $P(x)$ вместо x число $1 - \sqrt{2}$, то получим выражение $m - \sqrt{2}n$ (подумайте, почему). Так как $n = m = 0$, то снова получим 0, и значит $P(x)$ имеет корнем также и число $1 - \sqrt{2}$.

Вот другое доказательство леммы. Пусть $P(1 + \sqrt{2}) = 0$, где $P(x)$ — некий многочлен с целыми коэффициентами. Заметим, что число $1 + \sqrt{2}$ является также корнем многочлена $(x -$

$(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))=x^2-2x-1$. Поделим многочлен $P(x)$ на x^2-2x-1 в столбик, получим в остатке некий многочлен $ax+b$ не более чем первой степени с рациональными коэффициентами: $P(x)=Q(x)(x^2-2x-1)+ax+b$. Подставим в это равенство $x=1+\sqrt{2}$. Получим, что $a(1+\sqrt{2})+b=0$, откуда, так как $1+\sqrt{2}$ иррационально, $a=0$, а значит и $b=0$. Поэтому $P(x)$ делится на x^2-2x-1, а значит имеет корнем также и число $1-\sqrt{2}$.

Докажем предложение 1. Предположим, что квадрат разрезан на прямоугольники с отношениями сторон $1+\sqrt{2}$ и $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Растянем его в $1+\sqrt{2}$ раз по горизонтали. Получим разрезание прямоугольника с отношением сторон $1+\sqrt{2}$. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлением 1 и $(1+\sqrt{2})^2$, и имеет сопротивление $1+\sqrt{2}$. Согласно теореме о сопротивлении цепи, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, что $1+\sqrt{2}=\frac{p((1+\sqrt{2})^2)}{q((1+\sqrt{2})^2)}$. Значит, $q((1+\sqrt{2})^2)\cdot(1+\sqrt{2})-p((1+\sqrt{2})^2)=0$. Согласно предыдущей лемме, $q((1-\sqrt{2})^2)\cdot(1-\sqrt{2})-p((1-\sqrt{2})^2)=0$, то есть $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)}=1-\sqrt{2}$.

Заменим теперь в нашей цепи все резисторы сопротивлением $(1+\sqrt{2})^2$ на резисторы сопротивлением $(1-\sqrt{2})^2$. Поскольку схема цепи не изменилась, то ее сопротивление задается той же формулой Значит, сопротивление полученной цепи равно $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)}$. По доказанному выше, это число равно $1-\sqrt{2}$. Мы получили, что сопротивление цепи из резисторов с положительными сопротивлениями отрицательно. Это противоречит замечанию к теореме единственности. Значит, требуемое разрезание невозможно.

Казалось бы, приведённые примеры показывают, что не удастся найти разумного ответа на второй вопрос, поставленный в начале данной статьи. Однако мы уже в шаге от этого ответа. Посмотрим внимательно на наше последнее рассуждение. Противоречие возникло из-за того, что число $1-\sqrt{2}$, *сопряженное* числу $R=1+\sqrt{2}$, отрицательно. Это — проявление следующей общей закономерности:

Теорема Ласковича–Ринна–Секереша–Фрайлинга (1994)[8]**.** *Следующие три условия эквивалентны:*
1) Квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон R и $\frac{1}{R}$.
2) Для некоторых положительных рациональных чисел c_i выполнено равенство

$$c_1R+\cfrac{1}{c_2R+\cfrac{1}{c_3R+\cdots+\cfrac{1}{c_nR}}}=1.$$

3) Число R является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, при этом все комплексные числа, алгебраически сопряженные числу R, имеют положительную действительную часть.

(Число z называется *алгебраически сопряженным* числу R, если оно является корнем многочлена минимальной степени с целыми коэффициентами, имеющего корень R.)

Доказательство теоремы Ласковича–Ринна–Секереша–Фрайлинга.

В данной статье мы докажем импликации 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3) в этой теореме. Мы не будем доказывать импликацию 3) $\Rightarrow$ 2), являющуюся алгебраическим технически сложным фактом.

Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1)**.** Пусть выполнено равенство из условия 2) данной теоремы. Покажем, как разрезать квадрат на прямоугольники с отношением сторон R и $1/R$. Возьмём некоторый квадрат. Отрежем от него прямоугольник с отношением сторон c_1R, проведя вертикальный разрез. От оставшейся части отрежем прямоугольник с отношением сторон $\frac{1}{c_2R}$, проведя горизонтальный разрез. Будем продолжать этот процесс, чередуя вертикальные и горизонтальные разрезы. В силу равенства в

[8]Freiling C., Rinne D., Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. 1 (1994), 547–558; Laszkovich M., Szekeres G., Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geometry 13 (1995), 569–572.

условии 2) на n-м шаге мы получим прямоугольник с отношением сторон c_nR (или $\frac{1}{c_nR}$, в зависимости от чётности числа n). Тем самым квадрат оказался разбит на прямоугольники с отношениями сторон c_1R, $\frac{1}{c_2R}$, c_3R, $\ldots$, c_nR (или $\frac{1}{c_nR}$). Остаётся каждый из полученных прямоугольников разрезать на прямоугольники с отношением сторон R или $1/R$, и нужное разбиение построено.

Цепи переменного тока.

Для доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 3) нам потребуются электрические схемы, в которых сопротивления резисторов принимают комплексные значения с положительной действительной частью. Мы будем искать токи точно также: сначала выбираем направления токов, потом выписываем уравнения на них по правилам Кирхгофа. Оказывается, в этом случае опять решение единственно и существует. Единственность мы скоро докажем, а вывод формулы для общего сопротивления и доказательство существования можно проделать аналогично вещественному случаю. Отметим, что если не требовать положительность действительной части, то решение может не существовать или не быть единственным. Читатель может возразить здесь, что сила тока всегда вещественна. Да, снова под электрической цепью мы имеем в виду граф, у которого одно ребро — батарейка с заданной полярностью, на остальных рёбрах (мы будем их называть элементами) указано число (сопротивление элемента), которое раньше было положительным, а теперь комплексное с положительной действительной частью. Осталась неизменной система уравнений Кирхгофа. Отличие состоит лишь в новой физической интерпретации — цепи переменного тока. Мы обсудим её в конце статьи. Центральную роль в наших рассуждениях будет играть следующая

Теорема 2 (теорема единственности для цепей с комплексными сопротивлениями). *Пусть цепь состоит из элементов, сопротивления которых имеют положительные действительные части. Тогда система уравнений, задаваемая правилами Кирхгофа для данной цепи, имеет единственное решение.*

Следствие. *Сопротивление такой цепи имеет положительную действительную часть.*

Приведем доказательство для цепи, изображенной на рис. 4 (в которой сопротивления предполагаются комплексными). Предлагаем читателю разобраться самостоятельно, как данное рассуждение переносится на цепь общего вида.

Доказательство теоремы 2.

Как и в вещественном случае, достаточно показать, что если напряжение источника $U = 0$, то существует лишь нулевое решение системы уравнений Кирхгофа. Обозначим напряжение на k-м резисторе через $U_k = I_kR_k$. Назовем *мощностью выделения тепла* на данном резисторе величину $U_k\bar{I}_k = R_k|I_k|^2$. Так как R_k имеет положительную действительную часть, то мощность имеет неотрицательную действительную часть. Если не все токи в резисторах нулевые, то *общая мощность* $U_1\bar{I}_1+U_2\bar{I}_2+U_3\bar{I}_3+U_4\bar{I}_4+U_5\bar{I}_5$ имеет положительную действительную часть.

Докажем равенство $U_1\bar{I}_1 + U_2\bar{I}_2 + U_3\bar{I}_3 + U_4\bar{I}_4 + U_5\bar{I}_5 = U\bar{I}$ (оно выражает *закон сохранения энергии* — или, в вещественном случае, площади). Так как в нашем случае $U = 0$, то из этого равенства будет следовать, что все токи нулевые.

Чтобы можно было воспользоваться правилами Кирхгофа, нам нужно произвольным образом приписать току на каждом резисторе направление. Будем считать, что ток направлен от клеммы, которая на рис. 4 расположена левее, в клемму, которая расположена правее. Такое же соглашение примем и для направления тока в источнике. Тем самым для каждого элемента будут определены его *левая* и *правая* клемма.

Преобразуем выражение $U_1\bar{I}_1+U_2\bar{I}_2+U_3\bar{I}_3+U_4\bar{I}_4+U_5\bar{I}_5-U\bar{I}$. Пользуясь вторым правилом Кирхгофа, выразим U_4, U_5, U через U_1, U_2, U_3: $U_4 = U_1 + U_2$, $U_5 = U_2 + U_3$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Подставим эти выражения, получим

$$U_1\bar{I}_1 + U_2\bar{I}_2 + U_3\bar{I}_3 + (U_1 + U_2)\bar{I}_4 + (U_2 + U_3)\bar{I}_5 - (U_1 + U_2 + U_3)\bar{I}.$$

Сгруппируем слагаемые при U_1, U_2, U_3:

$$U_1(\bar{I}_1 + \bar{I}_4 - \bar{I}) + U_2(\bar{I}_2 + \bar{I}_4 + \bar{I}_5 - \bar{I}) + U_3(\bar{I}_3 + \bar{I}_5 - \bar{I}).$$

Покажем, что коэффициенты в скобках равны нулю. Для первой и последней скобки это сразу следует из первого правила Кирхгофа. Преобразуем вторую скобку. Сгруппируем слагаемые по левым клеммам соответствующих элементов:

$$(\bar{I}_4 - \bar{I}) + (\bar{I}_2 + \bar{I}_5)$$

Преобразуем каждую скобку, пользуясь первым правилом Кирхгофа. Получим

$$(-\bar{I}_1) + (\bar{I}_1).$$

Это выражение равно нулю, что и требовалось.

Доказательство следствия теоремы 2. По только что доказанной формуле, величина $R|I|^2 = U\bar{I}$ равна сумме мощностей выделения тепла на элементах цепи, что имеет положительную действительную часть, а значит, общее сопротивление R имеет положительную действительную часть.

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 3). Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и пусть z — число, алгебраически сопряженное числу R. Согласно теореме о сопротивлении цепи найдутся такие многочлены $p(x,y)$ и $q(x,y)$ с целыми коэффициентами, что выполнено равенство $\frac{p(\frac{1}{R},R)}{q(\frac{1}{R},R)} = 1$. Но тогда (аналогично доказательству предложения 1) выполнено равенство $\frac{p(\frac{1}{z},z)}{q(\frac{1}{z},z)} = 1$. Рассмотрим 2 случая.

Случай $Re(z) < 0$. В этом случае числа $-\frac{1}{z}$ и $-z$ имеют положительную действительную часть. Заменим в нашей цепи резисторы сопротивлением R и $\frac{1}{R}$ на элементы сопротивлением $-\frac{1}{z}$ и $-z$, соответственно. По теореме существования, мы получим новое распределение токов. Поскольку схема цепи не изменилась, то её сопротивление задается той же формулой. Значит, сопротивление полученной цепи равно $\frac{p(-\frac{1}{z},-z)}{q(-\frac{1}{z},-z)}$. Заметим, что из правила вычисления сопротивления цепи следует равенство $\frac{p(kx,ky)}{q(kx,ky)} = k\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ для любого числа k (при умножении сопротивлений всех элементов на одно и то же число сопротивление цепи умножается на то же самое число). Поэтому, по доказанному выше, $\frac{p(-\frac{1}{z},-z)}{q(-\frac{1}{z},-z)} = -\frac{p(\frac{1}{z},z)}{q(\frac{1}{z},z)} = -1$. Мы получили, что сопротивление цепи, сопротивления элементов которой имеют положительные действительные части, равно -1. Это противоречит следствию из теоремы 2. Значит, случай $Re(z) < 0$ невозможен.

Случай $Re(z) = 0$. Рассмотрим комплексное число w, очень близкое к числу z, и имеющее отрицательную действительную часть. Будем рассуждать, как в предыдущем случае, взяв вместо числа z число w. Мы получим электрическую цепь из элементов сопротивлениями $-w$ и $-\frac{1}{w}$, сопротивление S которой равно $-\frac{p(\frac{1}{w},w)}{q(\frac{1}{w},w)}$. Так как w близко к z, то число S близко к $-\frac{p(\frac{1}{z},z)}{q(\frac{1}{z},z)} = -1$. В частности, действительная часть числа S отрицательна. Мы вновь получили противоречие со следствием из теоремы 2. Значит, случай $Re(z) = 0$ также невозможен.

Итак, остаётся единственная возможность: $Re(z) > 0$. Следствие 1) $\Rightarrow$ 3) в теореме Ласковича–Ринна–Секереша–Фрайлинга доказано.

Задача 8. Докажите импликацию 2) $\Rightarrow$ 3) непосредственно (не используя разрезания прямоугольника).

Задача 9.** Комната имеет форму прямоугольника с отношением сторон R. Архитектор хочет выложить пол в комнате прямоугольными плитками с таким же отношением сторон, причём так, чтобы хотя бы одна плитка была ориентирована поперёк комнаты (рисунок 9). Плитки могут быть различны по величине. Докажите, что сделать это возможно тогда и только тогда, когда число R является корнем некоторого многочлена степени m с целыми коэффициентами, имеющего ровно 1 положительный корень и ровно $m-1$ отрицательный корень.

Задача 10.** (Открытая проблема) Какие прямоугольники можно составить из прямоугольников с данными отношениями сторон R_1, R_2, …, R_n? (Каждое из отношений R_k разрешается "использовать" хотя бы один раз.)

Цепи переменного тока.

Мы лишь покажем на примере, как с помощью комплексных чисел можно найти ток в цепи, на которую подано переменное напряжение (рис. 10 слева) [9]. Пусть на концы цепи из резисторов, конденсаторов

[9] О комплексных числах и цепях с комплексными сопротивлениями можно прочитать в статье С. Дориченко "Комплексные числа", "Квант" N5 (2008) и в …

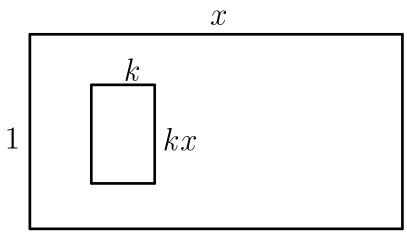

Figure 9: Плитка, ориентированная поперёк комнаты

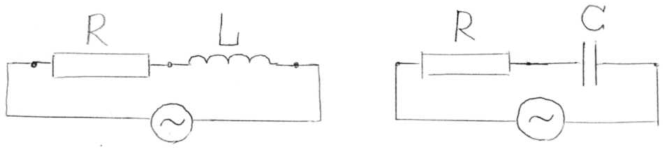

Figure 10: Примеры цепей переменного тока

и катушек индуктивности подано переменное напряжение $U_0\cos(\omega t)$, где U_0 и ω — фиксированные числа, а t — время. Назовем *напряжением источника тока* комплексное число $U_0(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))$. Занумеруем элементы цепи. Назовем *сопротивлением* элемента[10] комплексное число

$$R_k=\begin{cases} r, & \text{для резистора сопротивлением } r,\\ i\omega L, & \text{для катушки индуктивности } L,\\ -\dfrac{i}{\omega C}, & \text{для конденсатора ёмкости } C. \end{cases}$$

Запишем уравнения, задаваемые такими же правилами Кирхгофа, как и для цепи постоянного тока. Первое правило Кирхгофа для нашего примера даёт условие $I_1=I_2=I$. Второе правило Кирхгофа даёт уравнение:

$$rI+i\omega LI=U_0(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)).$$

Решая данное уравнение, находим $I=\frac{U_0(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))}{r+i\omega L}$. Оказывается, сила тока в цепи в момент времени t находится как $Re\,I$, где $Re\,z$ обозначает действительную часть комплексного числа z.

Сопротивлением цепи определяется как комплексное число $R=U/I$. Для нашего примера $R=r+i\omega L$. Аналогично находится сопротивление цепи на рис. 10 справа: $R=r-\frac{i}{\omega C}$.

Из полученных формул видно, что любое комплексное число, действительная часть которого положительна, является сопротивлением некоторой цепи рассматриваемого вида. Под *элементом с комплексным сопротивлением* мы будем далее понимать либо отдельный резистор, катушку индуктивности, конденсатор, либо одну из цепей, изображенных на рис. 10.

Квадрирование квадрата.

Было бы несправедливо не упомянуть о самой знаменитой задаче о разрезании прямоугольника: *разрезать квадрат на наименьшее количество попарно различных квадратов.* Первый пример такого разрезания появился в 1939. Увлекательный рассказ о том, как он был придуман, можно прочитать в главе "Квадрирование квадрата" книги М. Гарднера "Математические головоломки и развлечения". А вот полное решение задачи было получено только в 2007 году математиком Дуийвестийном. Оказывается, квадрат можно единственным (с точностью до движений) образом разрезать на 21 различный квадрат (см. рисунок 11), а вот на 20 — уже нельзя. Пример был найден с помощью компьютерного поиска, основанного на использовании электрических цепей.

Благодарности. Авторы благодарны Евгению Выродову, Олегу Карпенкову, Сергею Маркелову, Евгению Могилевскому, Александру Прохорову, Борису Френкину, ... Написание данной статьи частично поддержано грантом РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛ_а.

Решение задачи 2. (В конце номера) Можно считать, что горизонтальная сторона большого прямоугольника равна 1. Вертикальную сторону прямоугольника номер k обозначим через I_k (а вертикальную

[10]Это число называется также *импедансом* элемента.

Figure 11: Разрезание квадрата на 21 неравных квадратов

сторону большого — через I, тогда $1 = RI$). К левой стороне большого прямоугольника примыкают прямоугольники 1 и 4, откуда $I = I_1 + I_4$. К правой стороне прямоугольника 1 примыкают прямоугольники 2 и 5: $I_1 = I_2 + I_5$. Аналогично $I_3 = I_2 + I_4$ и $I = I_3 + I_5$. Последнее уравнение излишне: сложив второе и третье уравнения получим, что $I_1 + I_4 = I_3 + I_5$, поэтому последнее уравнение следует из первых трех.

Заметим, что горизонтальные стороны прямоугольников разбиения равны соответственно I_1, I_2, I_3, $3I_4$, $3I_5$. Глядя на схему разрезания, можно написать аналогичные уравнения, описывающие примыкания прямоугольников друг к другу горизонтальными сторонами. А именно,

$I_1 + 3I_5 = 1$, $I_2 + I_3 = 3I_5$, $I_1 + I_2 = 3I_4$, $I_3 + 3I_4 = 1$.

Аналогично предыдущему, последнее уравнение излишне.

Итак, получили систему:

$I = I_1 + I_4$; $I_1 = I_2 + I_5$; $I_3 = I_2 + I_4$; $I_1 + 3I_5 = 1$; $I_2 + I_3 = 3I_5$; $I_1 + I_2 = 3I_4$.

Решая ее, находим $I = 0,6$ и $R = 5/3$.