Два велосипедиста и вишнёвая косточка

Год спустя я снова охотился в том же лесу. Конечно, к тому времени я совсем позабыл об истории с вишневой косточкой. Каково же было моё изумление, когда из чащи леса прямо на меня выпрыгнул великолепный олень, у которого между рогами росло высокое, развесистое вишнёвое дерево!

Э. Распэ, «Приключения барона Мюнхгаузена»

Как известно, однажды на охоте барон Мюнхгаузен выстрелил в оленя вишневой косточкой, и через некоторое время на голове оленя выросло роскошное вишневое дерево. Мы попробуем проследить, каким образом из косточки вырастает дерево. А именно, как из простой одноходовой задачки получается целая серия красивых геометрических теорем. В качестве вишневой косточки возьмем такую задачу:

Задача 1. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC перпендикулярна основаниям. Тогда середина стороны AD равноудалена от вершин B и C.* [*)]

Задача, конечно, совершенно элементарная и решается легко:

Решение. Обозначим середины сторон AD и BC через K и L соответственно (рис. 1). Поскольку KL – средняя линия трапеции, она параллельна основаниям, следовательно она перпендикулярна BC. Таким образом, KL – серединный перпендикуляр к стороне BC, поэтому $KB = KC$.

Удивительно, что эта «косточка», которая является даже не задачей, а упражнением, дает начало множеству замечательных геометрических фактов. Среди них есть и сложные задачи, опубликованные в различных сборниках, и одна из «теорем о бабочке», и две задачи, предлагавшиеся в разные годы на Международной математической олимпиаде. В качестве первого шага мы докажем следующее утверждение, уже более интересное и трудное:

Задача 2. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка K с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то K будет равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2.*

Решение. Центры данных окружностей (обозначим их через O_1 и O_2) вместе с серединами отрезков AP_1 и AP_2 являются вершинами прямоугольной трапеции. Применив к ней результат задачи 1, получим, что середина отрезка O_1O_2 — и есть искомая точка K.

Заметим, что в решении не использовано ничего, кроме результата задачи 1. Математики в таких случаях говорят, что задача 2 есть прямое следствие задачи 1. Сделаем второй шаг и перейдем к еще одному прямому следствию:

Задача 3. *Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Тогда на плоскости найдется точка с таким свойством: если провести через точку A произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках P_1 и P_2, то эта точка будет равноудалена от P_1 и P_2.*

[*)] Задачи и упражнения мы будем формулировать в виде утверждений, слова «Докажите, что ...», как правило, будем опускать.

Решение. Из задачи 2 мы знаем, что точка K, середина отрезка O_1O_2, равноудалена от середин хорд AP_1 и AP_2. Растянем плоскость в два раза относительно точки A (т.е., проведем гомотетию с коэффициентом 2 с центром A). При этом середины данных хорд перейдут в точки P_1 и P_2, а точка K – в точку V такую, что отрезок AV будет иметь середину в точке K (рис. 2). Получаем, что V равноудалена от точек P_1 и P_2.

Несмотря на короткое решение, задача 3 справедливо считается трудной. В разных видах она появлялась и в известных сборниках, и на олимпиадах высокого уровня. А ведь по сути, в ней нет ничего, кроме элементарного свойства прямоугольной трапеции, установленного в задаче 1. Одно простое действие (гомотетия относительно точки A) превращает сложную и красивую теорему в тривиальную задачку про трапецию.

Небольшая вариация задачи 3 приводит нас к еще одной сложной задаче, предлагавшейся в 1979 году на Международной математической олимпиаде в Лондоне.

Задача 4 (о двух велосипедистах). [*)] **XXI Международная математическая олимпиада, Лондон, Великобритания, 1979 год.**

Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Два велосипедиста едут по этим окружностям (каждый – по своей) с постоянными скоростями и в одном направлении (либо оба – по часовой стрелке, либо оба – против). Они одновременно выезжают из точки B, делают один оборот и одновременно возвращаются в B. Тогда найдется неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

Решение. Уверен, что вы уже все поняли. Эта точка – и есть та самая точка V из задачи 3. В самом деле, если обозначить этих велосипедистов через P_1 и P_2, то в любой момент времени прямая P_1P_2 проходит через точку A. Почему ? Велосипедисты едут с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому дуги $\smile{BP_1}$ и $\smile{BP_2}$ имеют одинаковую угловую меру. Значит углы $\angle BAP_1$ и $\angle BAP_2$ равны, поскольку они опираются на эти дуги (рис. 3). А это значит, что точки P_1, P_2 и A лежат на одной прямой. Следовательно, $VP_1 = VP_2$ (задача 3).

Итак, в задачах 3 и 4 фигурирует одна и та же точка V. В ней сходятся все серединные перпендикуляры к отрезкам P_1P_2, соединяющим точки пересечения данных окружностей с прямыми, проходящими через A (задача 3). Она же всегда равноудалена от двух велосипедистов, одновременно выезжающих из точки B и двигающихся с одинаковыми угловыми скоростями. Уже этих двух свойств достаточно для того, чтобы точка имела свое название. Будем называть V *точкой двух велосипедистов*, соответствующей точке B. У любой пары пересекающихся окружностей таких замечательных точек две: одна соответствует точке A, другая – B. Эти точки симметричны относительно линии центров окружностей, а расстояние между ними равно длине общей хорды AB. Из решения задачи 3 легко установить их местоположение. Так, точка двух велосипедистов V, соответствующая точке B, является четвертой вершиной параллелограмма O_1AO_2V. Она же – четвертая вершина равнобедренной трапеции O_1O_2BV с основаниями O_1O_2 и BV.

Задача 4 о двух велосипедистах доставила немало удовольствия и участникам XXI Международной олимпиады и членам жюри. Была она предложена нашей

[*)] Для удобства, мы немного изменяем формулировки олимпиадных задач, полностью сохраняя при этом их смысл.

страной и дана в первый день олимпиады под номером три, что означает — самая сложная. Школьники нашли множество способов для её решения — от чисто геометрических до вычислительных (и даже физических).

Прошло шесть лет, и на XXVI Международной олимпиаде от нашей страны тем же автором была представлена ещё одна геометрическая задача, которая (о ужас!) оказалась на ту же самую идею. Правда, даже автор задачи этого не заметил. Было опубликовано два авторских решения, основанных на разных приёмах. Потом было найдено еще несколько геометрических решений. Ни одно из них и близко не упоминало точку двух велосипедистов.

Задача 5. **(XXVI Международная математическая олимпиада, Йоутса, Финляндия, 1985 г.)**

Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке 0, *проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ACB имеют ровно две общие точки A и M. Тогда угол OMA – прямой.*

На первый взгляд, ничего общего с задачами 4 или 3. Никаких движущихся точек, никаких произвольных прямых. Есть только жестко фиксированная конструкция, для которой надо доказать, что один из углов – прямой. И тем не менее, смотрите:

Решение. Пусть O – центр окружности $CPQB$. Точка O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам CP и BQ, поэтому она является точкой двух велосипедистов для окружностей APQ и ACB. Следовательно, OO_2O_1M – равнобедренная трапеция (O_1, O_2 – центры окружностей APQ и ACB соответственно, рис. 5). В частности, прямая OM параллельна прямой O_1O_2. Но прямая O_1O_2 перпендикулярна AM (линия центров двух окружностей перпендикулярна их общей хорде). Значит, и прямая OM перпендикулярна AM.

А вот еще одна задача, в решении которой точка двух велосипедистов возникает самым неожиданным образом:

Задача 6 (о бабочке). *Через точку A, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна – в точках P_1, P_2, другая – в точках Q_1, Q_2. Произвольная прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках M_1, M_2, а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 – в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $M_1N_1 = M_2N_2$.*

Задача эта принадлежит к замечательному семейству “теорем о бабочке”. На рисунке 6 показана эта “бабочка” с треугольными крыльями AP_1Q_1 и AP_2Q_2, окаймленными закрашенными луночками. Любая прямая, проходящая через A и пересекающая эти луночки, пересекает их по равным отрезкам. Интересный факт, не правда ли ? А доказывается он с помощью все той же задачи 3:

Решение. Пусть O – центр данной окружности. Он лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам P_1P_2 и Q_1Q_2, поэтому он является точкой двух велосипедистов для окружностей AP_1Q_1 и AP_2Q_2. Значит, какую бы прямую ни провести через A, точка O будет лежать не серединном перпендикуляре к отрезку N_1N_2. Но, с другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к хорде M_1M_2. Следовательно, отрезки N_1N_2 и M_1M_2 имеют общую середину, что и означает равенство $M_1N_1 = M_2N_2$.

Цикл задач под общим названием “теоремы о бабочке” имеет давнюю и богатую историю. Сначала появилась классическая теорема о бабочке. Вот она:

На окружности дана хорда AB. Через ее середину проведены произвольные хорды PQ и RS. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Тогда $AK = BL$.

Эта задача была опубликована в 1815 году в английском журнале «Gentleman's Dairy». Ее авторство приписывают английскому математику Уильяму Джорджу Горнеру (1786-1837), чье имя ныне известно каждому старшекласснику благодаря «схеме Горнера» для деления многочленов. С тех пор теорема о бабочке стала очень известной и популярной. За прошедшие почти два века найдено множество ее доказательств, как чисто геометрических, так и вычислительных. С некоторыми из них можно ознакомиться в задачниках И.Ф. Шарыгина, задачнике В.В. Прасолова, в книге Д.О. Шклярского, Н.Н. Ченцова и И.М. Яглома "Избранные задачи и теоремы элементарной математики", в знаменитой книге "Новые встречи с геометрией" Г.С.М. Кокстера и С.Л. Грейтцера. Попробуйте найти свое доказательство «теоремы о бабочке» (мы формулируем теорему еще раз в упражнении 4). Появилось много обобщений этой теоремы, и много близких по духу задач, которые объединились в цикл под общим названием «теоремы о бабочке». Одно из самых интересных обобщений придумал замечательный геометр Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004). Ему, кстати принадлежит и задача 5, а задача 4 придумана им в соавторстве с другим замечательным математиком Николаем Борисовичем Васильевым (1940-1998). Идея обобщенной теоремы о бабочке состоит в том, что середину хорды AB можно «раздвоить», при этом ничего не изменив в доказательстве. Мы даем формулировку этой теоремы в упражнении 5, а в упражнениях 6 и 7 – еще несколько теорем о бабочке, которые, как и задача 6, уже имеет мало общего с оригиналом. Кроме, разумеется, самой "бабочки".

Попробуем подвести некоторые итоги. Две задачи международных олимпиад, задача о бабочке, два десятка геометрических задач, которые мы сформулировали в виде упражнений (некоторые из них появлялись на математических олимпиадах, в Задачнике «Кванта», и в различных сборниках задач). Список далеко не полный. И все это выросло из задачи 1, совсем простенькой и неинтересной, которую мы вначале и решать-то не хотели.

Упражнения

Упражнение 1 *(Н.Б. Васильев)*.[*)] Сформулируйте и докажите теорему о двух велосипедистах для случая, когда велосипедисты двигаются по окружностям в разных направлениях.

Упражнение 2. Две окружности с радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B. Пусть V – точка двух велосипедистов, соответствующая точке B. Тогда для любой окружности с центром V, пересекающей обе окружности (первую - в точках M_1, N_1, вторую - в точках M_2, N_2) имеем

а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A;

б) четырехугольники VBM_1N_2 и VN_1M_2B – вписанные;

в) $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Упражнение 3. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а продолжения сторон AD и BC – в точке L. Тогда описанные окружности

[*)] В тех случаях, когда нам известно имя автора задачи, мы будем его указывать.

треугольников BKC, AKD, ALB и DLC пересекаются в одной точке, лежащей на прямой KL. Более того, перпендикуляр, восставленный в этой точке к прямой KL, проходит через центр окружности $ABCD$.

Упражнение 4 *(У. Горнер)*. На окружности дана хорда AB. Через ее середину проведены произвольные хорды PQ и RS. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Тогда $AK = BL$.

Упражнение 5 *(И.Ф. Шарыгин)*. На окружности дана хорда AB, на ней – точки M и N, причем $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Тогда $AK = BL$.

Упражнение 6 *(С.Л. Берлов)*. Дан остроугольный треугольник ABC, H – точка пересечения его высот, D – середина AD. Если прямая, проходящая через H и перпендикулярная отрезку HD пересекает прямые AB и BC в точках E и F, то $HE = HF$.

Упражнение 7. На сторонах угла взяты точки A и B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, а другая – в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Тогда $MP = MQ$.

Упражнение 8. Сформулируйте и докажите аналоги классической теоремы о бабочке для параболы, гиперболы, эллипса. Для каких из этих фигур будет верно обобщение теоремы о бабочке, как в упражнении 5 ?

Указание. Можно воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности на плоскость. В рассуждениях с параболой и гиперболой можно применить метод координат.

Упражнение 9. Даны две окружности с общим центром O. Окружности α и β имеют разные радиусы и касаются данных окружностей. Тогда O является точкой двух велосипедистов для окружностей α и β.

Упражнение 10. В условиях предыдущей задачи прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из точек пересечения окружностей α и β.

Упражнение 11. Пусть V – точка двух велосипедистов данной пары окружностей. Если провести инверсию относительно любой окружности с центром V, то V останется точкой двух велосипедистов и для образов окружностей.

Упражнение 12 *(Г.В. Дорофеев)*. Получите другое решение задачи 6, основанное на следующем построении. Проведем прямую N_1Q_1 и обозначим через S точку ее повторного пересечения с исходной окружностью. Тогда а) прямые SP_2 и M_1M_2 параллельны; б) треугольники M_1SN_1 и $M_2P_2N_2$ равны.

Упражнение 13. Останется ли утверждение теоремы о двух велосипедистах верным, если снять требование одновременного выезда из точки B ?

Упражнение 14. Два велосипедиста движутся с одинаковыми скоростями по двум пересекающимся прямым. Тогда на плоскости существует неподвижная точка, которая все время равноудалена от велосипедистов.

Упражнение 15 *(И.Ф. Шарыгин)*. На одной из двух пересекающихся сфер взяты точки P_1 и Q_1, на другой – точки P_2 и Q_2. Отрезок P_1P_2 проходит через общую точку сфер. Отрезок Q_1Q_2 проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, соединяющей центры сфер. Тогда проекции отрезков P_1Q_1 и P_2Q_2 на прямую P_1P_2 равны.

Упражнение 16. В пространстве даны две пересекающиеся сферы. Через одну из общих точек сфер проводятся всевозможные прямые, пересекающие сферы повторно в точках M и N. Тогда в пространстве найдется фиксированная точка, равноудаленная от точек M и N.

Упражнение 17. Сформулируйте и решите пространственные аналоги задач 4, 5 и 9 – 11 (вместо окружностей на плоскости нужно взять сферы в пространстве).