Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(5–6 классы)

Составитель: И. И. Осипов

Москва, 2017

Математический кружок (5–6 классы). / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. И. И. Осипов. — М.: МГУ, 2017.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы. В основу брошюры легли задачи, предлагавшиеся на Малом мехмате МГУ, а также на математических кружках в Центре образования № 548 «Царицыно» и математических кружках при МПГУ.

Содержание

Предисловие

Эта брошюра призвана помочь организовать *математический кружок* для школьников «младшего кружкового возраста». Условно этот возраст соответствует 5 или 6 классу средней школы, однако собранные здесь задачи можно с успехом решать с умными 4-классниками, а также предлагать (в рамках «ликвидации безграмотности») старшеклассникам, которым не довелось в должное время поучаствовать в математических кружках.

Каждый раздел брошюры соответствует одному занятию кружка и состоит из двух частей — листка с задачами для выдачи ученикам и комментария для преподавателя. Для удобства оригинал-макеты листков также выделены в отдельный файл.

Занятие с использованием листочка обыкновенно проводится примерно **по следующей схеме:**

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи и, если необходимо, читает комментарии.

- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и начинает *самостоятельно* их решать. На первом занятии школьникам нужно объявить: задачи можно решать в любом порядке; как только задача (по мнению школьника) решена, нужно поднять руку и приготовиться обсуждать решение с преподавателем *устно.* Кружок — это не письменная олимпиада. Как правило, **не нужно** в начале занятия «рассказывать теорию»: задачи подобраны так, чтобы решающий сам додумался до ключевых идей листочка. Иногда в начале занятия, до раздачи новых листков, разбираются решения некоторых задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* школьники решают задачи и время от времени пытаются их «сдать» преподавателям. Преподавателей на кружке может быть несколько, если учеников достаточно много. В идеале на каждого преподавателя должно приходиться 7–9 школьников. Решения задач обсуждаются *индивидуально* с каждым школьником.

– Если решение **верно,** школьника следует поздравить с решённой задачей и поставить «плюсик» в специальную таблицу (кондуит, или «плюсник»).

– Если решение **неверно,** школьнику предлагается продолжить размышления над задачей. Иногда можно давать небольшие подсказки.

Мы считаем, что **главная цель** математических кружков — приносить школьникам **радость** решения математических задач и через это развивать их смекалку и расширять кругозор. Поэтому мы **категорически не советуем** подменять эту главную цель целями побочными, в частности:

- не советуем ставить оценки «за работу на кружках», проводить на кружке контрольные работы и вообще делать участие в кружке обязательным для школьника;

- не советуем объяснять решения всех задач из брошюры (школьник получает радость только от собственного, а не от чужого решения);

- не считаем правильным задаваться целью подготовки к определённому виду олимпиад или других соревнований. (В то же время школьники, посещающие математические кружки, в среднем лучше выступают на олимпиадах.)

Мы полагаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2–3 задачи и немного продвинется ещё в 1–2 задачах, то это уже хороший результат. Однако бывает, что задачи оказываются **слишком сложными** для школьников. В этом случае неправильно превращать занятие в разбор всех задач у доски. Вместо этого можно давать подсказки — как индивидуально, так и всем сразу. Представление о том, как подсказывать в конкретных задачах, можно извлечь из комментариев к листкам.

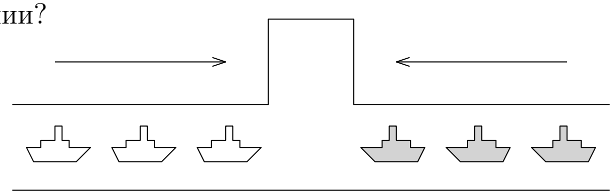
Если всё-таки наши листочки в целом оказались слишком сложными, мы советуем подбирать к каждому занятию аналогичные по тематике более простые задачи. Помните, что приводимая здесь подборка задач призвана *помочь* в организации кружка, но ни в коем случае не загнать его в жёсткие рамки. При выборе задач прежде всего руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших учеников:** задачи должны нравиться преподавателям, быть интересны и посильны ученикам.

Удачи!

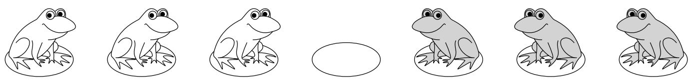
Листок 1. Переправы

$\boxed{\textbf{1}}$ Трое туристов должны перебраться с одного берега реки на другой. В их распоряжении старая лодка, которая может выдержать нагрузку в 100 кг. Вес одного из туристов 40 кг, второго — 50 кг, третьего — 80 кг. Как им нужно действовать, чтобы перебраться на другой берег?

$\boxed{\textbf{2}}$ По длинному узкому каналу, изображённому на рисунке, один за другим идут три парохода. Навстречу им — ещё три парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нем разминуться не могут, но в канале есть залив, где может поместиться один пароход. Смогут ли пароходы разъехаться, чтобы продолжить путь в прежнем направлении?



$\boxed{\textbf{3}}$ На болоте в ряд расположены 7 кочек. На всех, кроме центральной, сидят лягушки: слева белые, а справа — зелёные. Лягушки умеют прыгать на соседнюю свободную кочку или на свободную кочку через одну лягушку, но при этом могут прыгать только вперёд (белые — вправо, а зелёные — влево). Лягушки хотят поменяться местами так, чтобы на трёх крайних левых кочках сидели зелёные, а на правых - белые. Как им это сделать?



$\boxed{\textbf{4}}$ **а)** Три принцессы и три людоеда должны переправиться через реку на двухместной лодке. Принцессы боятся оставаться в меньшинстве, иначе они могут быть съедены (съесть их могут в том числе и тогда, когда в лодке и на берегу, к которому она причаливает, людоедов в сумме оказывается больше, чем принцесс). Придумайте способ, который позволит им переправиться.

б) Сумеют ли они переправиться, если грести умеет только одна из принцесс и только один из людоедов?

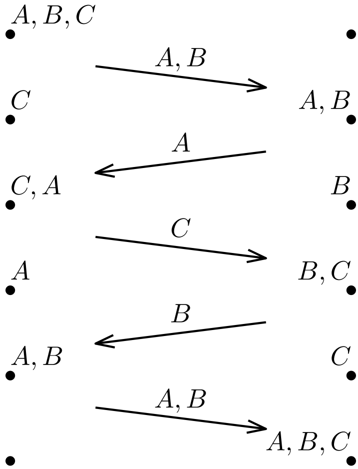
5 Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, сын — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих и идти по нему без фонарика смертельно опасно. Если мост переходят двое, то идут они со скоростью более медленного из них. За какое наименьшее время они смогут перебраться на противоположную сторону?

6 На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь из сорока разбойников. У них есть одна лодка, в которой могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Но разбойники согласны плыть на лодке только с друзьями, а дружат между собой только разбойники, стоящие рядом (первый со вторым, второй — с первым и третьим, третий — со вторым и четвёртым, и т.д.)

Когда разбойники поняли, что не смогут перебраться на другой берег, и уже собрались уходить, к ним подошёл Али-Баба, друживший с первым и вторым разбойниками, и они все вместе смогли перебраться на другой берег. Как они смогли это сделать?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Назовём “лёгких” туристов A и B, а “тяжёлого” — C.



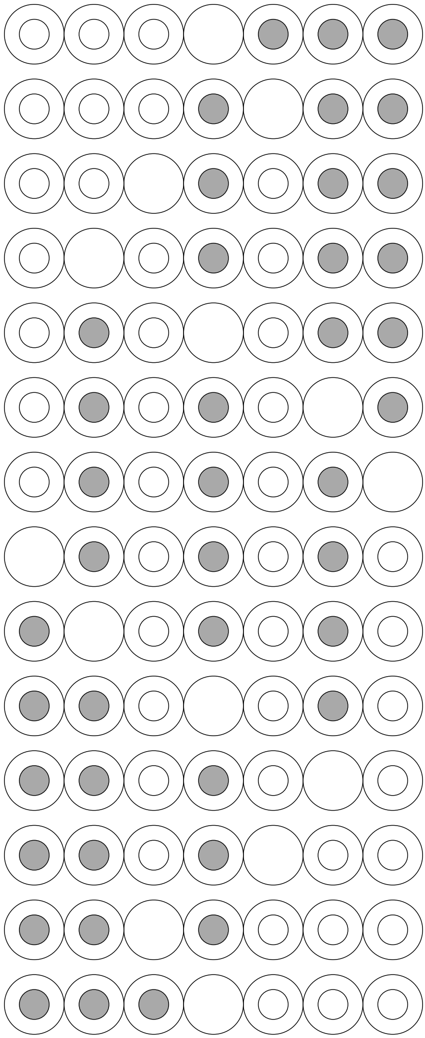
Приведённое решение не единственное. Другие решения можно получить из этого, меняя А и В местами и добавляя блоки действий, не изменяющие состояния. От школьников не требуется искать наиболее оптимальный метод, однако, при приёме этой и других задач данного листка стоит обращать внимание школьников на то, как можно улучшить их решение, уменьшив число действий.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Будем называть пароходы, плывущие слева направо “белыми”, а плывущие справа налево “чёрными”. Покажем, как пропустить налево первый чёрный пароход:

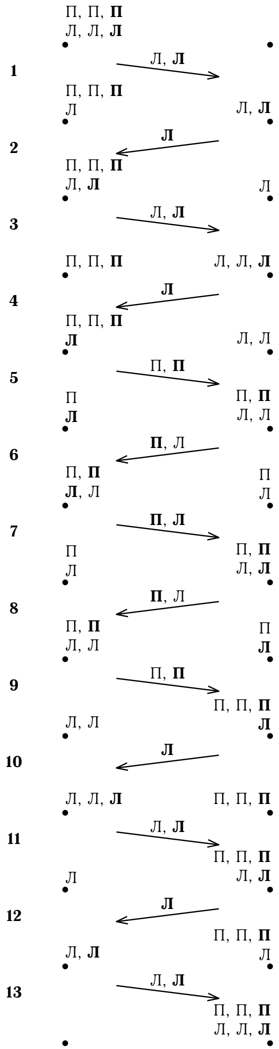
1. Первый чёрный пароход уходит в залив.
2. Белые пароходы проплывают мимо (чёрные пароходы отплывают назад, чтобы белым хватило места).
3. Первый чёрный пароход уплывает налево.
4. Белые пароходы отплывают назад.

Остаётся аналогично поступить с двумя оставшимися чёрными пароходами.

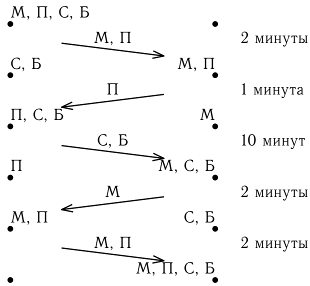
3 Всего есть два одинаковых с точностью до симметрии решения. Ниже приведено одно из них:



4 Одно из решений, подходящее для обоих пунктов, приведено ниже, в пункте **а** можно пропустить 7 и 8 действия. Людоед и принцесса, которые в пункте **б** умеют грести, выделены жирным шрифтом.



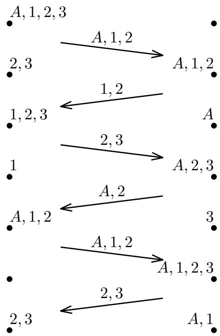
$\boxed{5}$ За 17 минут. Сделать это нетрудно, если догадаться, что сына обязательно нужно отправлять вместе с бабушкой:



В этой задаче недостаточно привести пример, нужно ещё и доказать, что он наименьший. Сделать это можно разными способами, многие из которых требуют перебора случаев. Постарайтесь внимательно проверить придуманное школьником доказательство и, если потребуется, помогите проверить все случаи. Далее приводится одно из наиболее простых доказательств.

При каждом перемещении вправо количество людей на правой стороне увеличивается на один или на два, а при каждом перемещении влево — уменьшается на один или на два. Чтобы на правой стороне оказались четверо потребуется хотя бы три раза пройти вдвоём направо и хотя бы два раза налево в одиночку (всего пять переходов). В одном из переходов направо участвует бабушка, а значит, он займёт не менее десяти минут. Каждый из двух оставшихся переходов вправо вдвоём займёт не менее двух минут. Каждое из перемещений влево требует как минимум минуту. Покажем, что получившаяся оценка в 16 минут недостижима. Чтобы уложиться в 16 минут, нужно, чтобы перемещений было ровно пять, и все они занимали в точности указанное выше минимальное время. Значит, возвращать фонарик назад оба раза должен отец. Но тогда отец должен трижды переместиться вправо по мосту. А так как остальные члены семьи должны в итоге оказаться справа, то один раз он переходит с бабушкой, один раз с сыном, один раз с мамой. Но в таком случае в сумме получится целых 19 минут. За 16 минут уложиться не выйдет.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Для начала покажем, как Али-Баба и первые трое разбойников могут переправить на другой берег любых двух соседних рабойников.

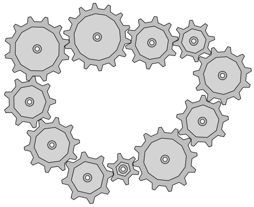


После этих действий лодка находится на левом берегу, а на правом — Али-Баба и первый разбойник. Теперь любые два разбойника, которые дружат между собой, могут перебраться на другой берег, а Али-Баба и первый разбойник вернут лодку. Разобьём всех разбойников, начиная с пятого, на пары и переправим их таким способом на другой берег. Затем отправим таким же способом третьего и четвёртого. И, наконец, переправим Али-Бабу, первого и второго разбойника (Али-Бабу, вообще говоря, можно оставить и на этом берегу, если он к этому моменту уже передумал плыть через Босфор).

У этой задачи есть и другие решения, в том числе использующие индукцию. Если потребуется, помогите школьникам аккуратно сформулировать алгоритм перевозки разбойников.

Листок 2. Чётность

1 Одиннадцать шестерёнок соединены в замкнутую цепочку так, как показано на рисунке. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?



2 В строчку выписаны 10 единиц, между которыми расставлены знаки “+” и “−”. Обязательно ли значение получившегося выражения чётно?

3 Кузнечик умеет прыгать в любом направлении вдоль прямой на 6 сантиметров или на 8 сантиметров. Сможет ли он попасть в точку, находящуюся от исходной на расстоянии

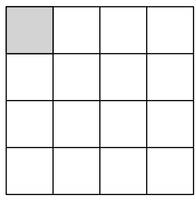
а) 4 сантиметра;

б) 7 сантиметров;

в) 2222 сантимера?

4 Кузнечик прыгает вдоль прямой, причём первый раз он прыгает на 1 сантиметр, во второй раз — на 2 сантиметра, а в третий раз — на 3 и так далее. Может ли он после 10 прыжков оказаться там, где начинал?

5 Что больше: сумма всех нечётных чисел от 1 до 1000 или сумма всех чётных чисел от 1 до 1000? На сколько?



6 а) В квадрате 4×4 левая верхняя клетка — чёрная, а все остальные — белые. За одно действие разрешается одновременно поменять цвета всех клеток в любой строке или столбце. Можно ли несколькими такими действиями закрасить все клетки в один цвет?

б) Можно ли это сделать, если изначально дан квадрат 3×3 с одной закрашенной клеткой?

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ Нет, не могут (разве что немного дёргаться, насколько позволяют зазоры между зубцами). Дело в том, что две сцепленные шестерёнки должны крутиться в разные стороны: одна — по часовой стрелке, другая — против. Выберем одну из шестерёнок и предположим, что она крутится в каком-то направлении, тогда следующая за ней крутится в противоположном направлении, вторая от неё — в том же, что и первая, и т.д. Одиннадцатая шестерёнка должна будет крутиться в том же направлении, что и первая, а это невозможно.

$\boxed{2}$ Да, обязательно. Если все расставленные знаки — знаки сложения, то результат равен десяти, и он чётный. При изменении любого знака на противоположный значение выражения увеличивается или уменьшается на два, а значит, чётность его не меняется.

При решении задач на чётность школьники часто спрашивают, чётный ли ноль, и как определить чётность отрицательных чисел. Целое число является чётным, если без остатка делится на два. Целое число делится на два, если его можно получить умножением на два какого-то целого числа. Ноль можно получить, умножив ноль на два.

$\boxed{3}$ В пунктах **а** и **в** ответ — да, сможет. Заметим, что он может сдвинуться на расстояние в 2 сантиметра от исходной точки, прыгнув на 8 сантиметров от неё, а затем на 6 сантиметров в обратном направлении. Такими двойными прыжками в 2 сантиметра он сможет добраться до любой точки, расстояние до которой в сантиметрах чётно.

В пункте **б** ответ — нет. Расстояние до исходной точки в сантиметрах всегда будет чётным, потому что изначально оно нулевое, а значит, чётно; а при прыжке на 6 или 8 сантиметров расстояние станет равно сумме или разности чётных чисел.

$\boxed{4}$ Нет. Запишем итоговую координату кузнечика, как результат сложения и вычитания чисел от 1 до 10. По соображениям, аналогичным приведённым во второй задаче, от расстановки знаков сумма меняться не будет. Сумма чисел от 1 до 10 равна 45 и нечётна, а значит, итоговое расстояние от начальной точки будет нечётным и не может быть нулевым.

$\boxed{\textbf{5}}$ Решение задачи будет приведено далее в предположении, что рассматриваются числа до тысячи *включительно*. Если школьник понял уловие иначе, ответ будет противоположным. В любом случае решение нужно внимательно проверить и засчитать как правильное, если в нём нет ошибок.

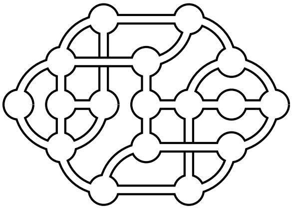
Разобьём числа на пары: нечётное и чётное, следующее за ним. В каждой паре чётное на единицу больше нечётного, а всего пар 500. А значит, сумма всех чётных будет на 500 больше суммы всех нечётных.

$\boxed{\textbf{6}}$ **а)** Заметим, что перекрашивание любого столбца или строки не меняет чётность количества закрашенных клеток: если в столбце (строке) было нечётное число закрашенных клеток, то после перекрашивания их опять будет нечётное, и наоборот. Таким образом, количество закрашенных клеток всегда будет нечётно и не сможет стать равно ни 0, ни 16.

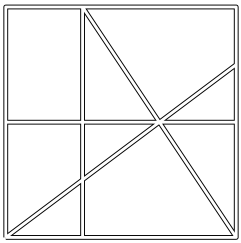
б) Для квадрата 3×3 соображения из пункта а не сработают, так как в нём нечётное число клеток. Рассмотрим квадратик 2×2, в который попала закрашенная клетка. Количество закрашенных клеток в нём всегда будет нечётным (по соображениям, аналогичным приведённым в пункте а), а значит, мы не сможем закрасить полностью в один цвет ни его, ни весь квадрат 3×3.

Листок 3. Ещё как можно!

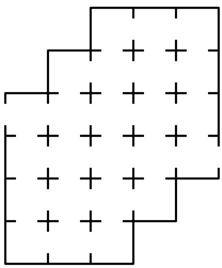
1 Мэр хочет проложить по дорогам города, схема которого изображена на рисунке, кольцевой маршрут автобуса, проходящий через все остановки (они отмечены кружками) ровно по одному разу. Существует ли такой маршрут?



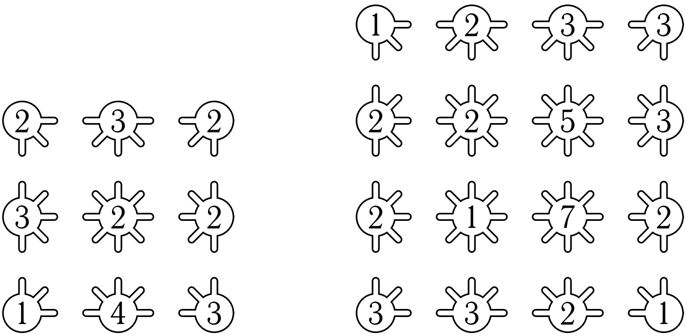
2 Начальник полиции хочет расставить городовых на улицах города, карта которого изображена на рисунке, так, чтобы на каждой улице был хотя бы один городовой. Какое наименьшее число городовых необходимо для этого?



3 В замке Барона Мюнхгаузена, план которого изображён на рисунке, ровно 24 комнаты. Барон утверждает, что однажды он вошёл в замок, обошёл все комнаты и вышел из замка, побывав при этом в каждой комнате ровно один раз. Можно ли это сделать?



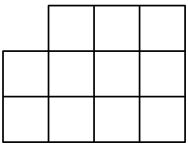
4 В каждом из кружков написано число “спиц”, которые должны из него выходить. “Спицы” должны быть прямыми и не должны пересекаться. Можно ли расставить “спицы”, выполнив эти условия?



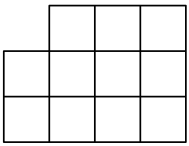
а) б)

5 В каждом из пунктов указаны шахматные фигуры и доска, на которой их требуется расставить. Можно ли это сделать так, чтобы ни одна фигура не била другую?

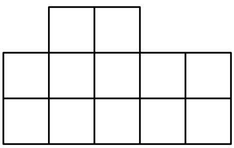
а) ♗♗♗♗♕



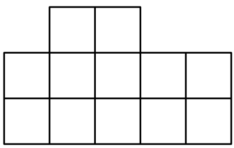
б) ♗♗♔♔♘♘



в) ♔♘♕♖



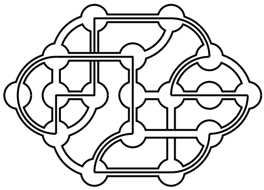
г) ♗♗♗♔♘♖



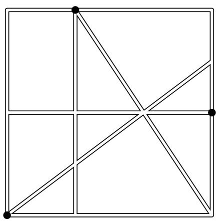
Ответы и комментарии

Во всех задачах этого листка решение существует и единственно, если ответ совпадает с правильным, можно сразу засчитывать задачу, если нет — нужно указать школьнику, почему именно его ответ не соответствует условию.

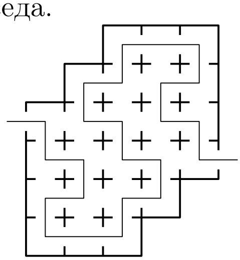
1 У школьников иногда возникают сложности с мостами, имеющимися на карте — в двух местах дороги проходят одна над другой и перескочить с одной на другую нельзя.



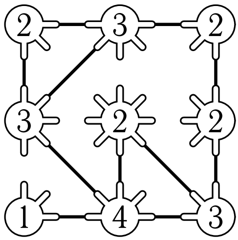
2 Заметим, что три вертикальные дороги не имеют общих точек, а значит, на каждой из них должен стоять ровно один городовой. Аналогичное замечание верно и для горизонтальных дорог. Значит, все городовые должны стоять на пересечениях вертикальных и горизонтальных дорог, остаётся расставить их так, чтобы наклонные дороги тоже были покрыты.



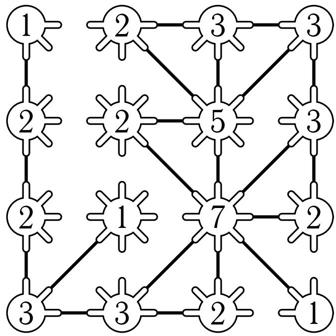
3 Путь проще найти, если обратить внимание на угловые комнаты, у которых ровно два соседа.



$\boxed{\textbf{4}}$ В обоих случаях решение удобно начинать “раскручивать” с угловых кружков с числом 3.

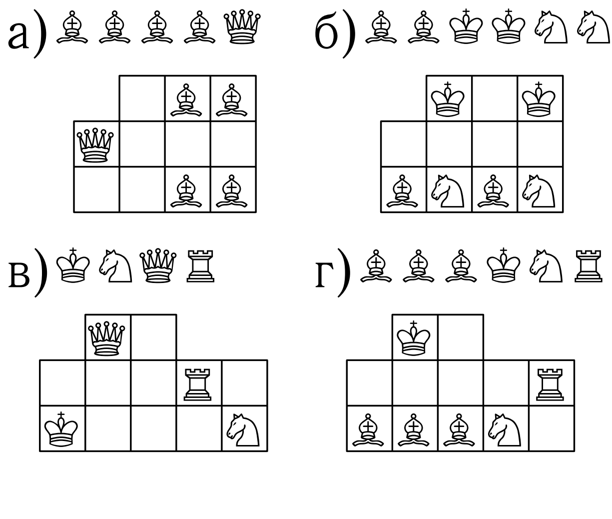


а)



б)

$\boxed{\textbf{5}}$ Если кто-то из школьников не знает, как ходят шахматные фигуры, подробно объясните правила для всех фигур, использующихся в задаче.



Листок 4. А вот и нельзя!

1 Существуют ли такие 4 натуральных числа, что и их сумма, и их произведение — нечётные?

2 Можно ли решить ребус на рисунке справа? *(Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным — разные)*

$$\begin{array}{r} \text{О Д И Н} \\ +\,\text{О Д И Н} \\ \text{П Я Т Ь} \\ \hline \text{С Е М Ь} \end{array}$$

3 За круглым столом сидят 10 детей. Может ли быть так, что у каждого из них один сосед — мальчик, а другой — девочка?

4 Барон Мюхгаузен утверждает, что нашёл такое число, что если его вычесть из тысячи, то получится число из тех же цифр, но записанных в обратном порядке. Есть ли такое число?

5 Андрей, Боря и Вася вместе съели 10 конфет.
Андрей сказал: "Я съел 3 конфеты, а Боря — 4."
Боря ответил: "Я съел всего лишь 2 конфеты, а Вася съел 3."
Вася заявил: "Я съел 4 конфеты, а вот Андрей съел целых 5."
Могло ли быть так, что каждый из них хотя бы в одном из двух своих утверждений сказал правду?

6 Можно ли раскрасить клетки доски 5×5 в два цвета — чёрный и белый — так, чтобы у каждой белой клетки было ровно 3 чёрные соседки, а у каждой чёрной клетки — ровно 2 белые?
(Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону)

Ответы и комментарии

Во всех задачах этого листка ответ “нет, нельзя”. В каждой из задач важен не сам ответ, а доказательство.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Нет. Если в произведении есть хотя бы одно чётное число, то результат будет чётным. Но если все числа нечётны, то чётной будет их сумма.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Нет. Доказать это можно разными способами. Например, заметить, что в ребусе используется 11 различных букв, а цифр, которыми их нужно заменить — всего 10.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Нет. Предположим, что детей удалось рассадить таким способом. Возьмём кого-нибудь из детей. Сидящий от него слева через одного должен быть другого пола. Сидящий через 3 — того же, сидящий через 5 — снова другого, сидящий через 7 — того же. С другой стороны, сидящий слева через 7 сидит через одного справа, а значит, должен быть другого пола. Противоречие. Значит, предположение было неверно, рассадить так детей нельзя.

Если школьники пытаются объяснить решение, приводя примеры того, что рассадить детей не получается, обратите внимание на то, все ли случаи рассмотрены; важно понимать, какие шаги в построении делаются однозначно, а какие — нет.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нет. Если в числе меньше трёх знаков, то сумма его с его развёрнутым вариантом будет меньше тысячи, если же в нём больше трёх знаков, то оно уже само по себе будет больше тысячи. Значит, число может быть только трёхзначным. Его первая и последняя цифры в сумме должны давать число с нулём на конце. Так как первая цифра числа — не ноль, их сумма должна быть равна 10. Но тогда, какой бы ни была вторая цифра числа, сумма будет больше 1010.

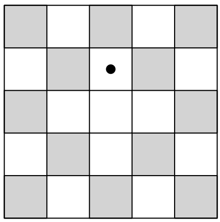
$\boxed{\mathbf{5}}$ Предположим, что каждый из них сказал правду хотя бы один раз. Рассмотрим два случая:

• Первая часть утверждения Андрея верна. Тогда неверна вторая часть утверждения Васи, а значит, должна быть верна его первая часть. Но тогда неверна вторая часть утверждения Бори, а значит, верна его первая часть. Таким образом, Андрей съел 3 конфеты, Боря — 2 конфеты, а Вася — 4. В сумме выходит не 10 конфет, этот случай нам не подходит.

• Первая часть утверждения Андрея неверна. Тогда должна быть верна вторая. Тогда неверна первая часть утверждения Бори, а значит, должна быть верна вторая. Аналогично, первая часть утверждение Васи неверна, а значит, верна вторая. Таким образом, Боря съел 4 конфеты, Вася — 3, а Андрей — 5. Сумма вновь не равна десяти.

Оба случая невозможны, а значит, было неверно наше предположение, что каждый сказал правду хотя бы один раз.

6 Нет. Рассмотрим угловую клетку. У неё всего две соседки, а значит, все угловые клетки — чёрные, а их соседки — белые. Все соседки этих восьми белых клеток не могут быть белыми, потому что у них уже есть две белые соседки, а значит, 3 чёрных соседок у них не может быть. А значит, они — чёрные. Теперь посмотрим на клетку, отмеченную на рисунке. С одной стороны она должна быть чёрной — иначе у её соседки сверху будет три белых соседки, а не ровно две. С другой стороны, У неё не может быть двух белых соседок, так как есть уже три чёрные.



Листок 5. Лингвистика

1 Вот запись некоторых числительных на языке южный киваи, на котором говорит один из народов страны Папуа — Новая Гвинея:

2 — netewa
4 — netewa netewa
5 — netewa netewa nao

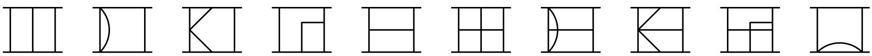
А как на этом языке будет записываться число 3?

2 В таблице приведены числа в записи китайскими иероглифами.

五千六十九	5069
九十	90
七千七百二	7702
千百五	1105
百二十七	127
千九	1009

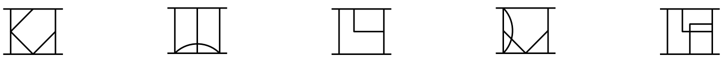
Запишите иероглифами число 2017.

3 Создатели компьютерной игры “Riven: The Sequel to Myst” придумали для неё собственный язык и числовую систему. Первые десять чисел в ней выглядят так:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Определите, каким числам соответствуют эти знаки:



4 Даны обозначения некоторых дат на языке суахили и их переводы на русский язык в неизвестном порядке. Найдите русский перевод для каждого суахилийского словосочетания.

tarehe tatu Disemba jumamosi	5 октября, понедельник
tarehe pili Aprili jumanne	5 октября, среда
tarehe nne Aprili jumanne	5 октября, воскресенье
tarehe tano Oktoba jumapili	2 апреля, вторник
tarehe tano Oktoba jumatatu	4 апреля, вторник
tarehe tano Oktoba jumatano	3 декабря, суббота

5 Даны некоторые из чисел от 1 до 9 на жу|'хоанском диалекте языка !кунг (в неизвестном порядке):

n!ànì ko n!ànì,
n|è!é,
tsàqn ko n!ànì,
tsàqn ko tsàqn ko n!ànì,
tsàqn ko tsàqn ko tsàqn ko tsàqn,
n!ànì,
n!ànì ko n!ànì ko n!ànì

Запишите на жу|'хоанском диалекте языка !кунг те два числа от 1 до 9, которые не приведены в условии.

Ответы и комментарии

Решения задач этого листка опираются не только на математически точные рассуждения, но и на языковую интуицию. Одним из основных принципов здесь является то, что следует искать наиболее простое объяснение языковому феномену, согласующееся с имеющимися данными. Чем проще гипотеза — тем проще её проверить. Понятно, что в языке (например, искуственно созданном) может не быть никаких принципов словообразования. И если бы языки, о которых идёт речь в задачах, могли бы быть такими, ни в одной из задач нельзя было бы дать точного ответа.

Если у школьников возникают проблемы с пониманием того, как решать такие задачи, предложите им выдвинуть гипотезу о том, как устроен язык из задачи — если гипотеза окажется верна, она может помочь дать правильный ответ. Если замеченная школьником закономерность не согласуется с условием задачи, посоветуйте проверить её на данных из условия. Если придуманное школьниками устройство языка выглядит неестественно, постарайтесь объяснить, почему в естественных языках такое поведение маловероятно.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Как можно заметить, число 4 записывается, как двойка, повторенная дважды, а число пять — как дважды повторенная двойка и ещё одно слово. Естественно предположить, что все отдельные слова, входящие в сложное числительное, тоже являются числительными и складываются. То есть nao означает единицу. Тройку в таком случае логично записать, как 2+1, то есть “netewa nao”.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Как можно заметить, длина записи китайских чисел не соответствует количеству их знаков (запись числа 1105 длиннее записи числа 127), и не все знаки соответствуют цифрам (последние два знака числа 5069 используются для записи числа 90). Один из знаков в записи числа 90 встречается во всех числах, в записи которых присутствует девятка, а вот другой знак (похожий на крестик), обозначает не ноль, а десять — он встречается во всех числах, в которых не нулевое число десятков.

Действительно, помимо цифр приведённых в записях чисел используются иероглифы, обозначающие 10, 100 и 1000, перед которыми могут добавляться цифры, чтобы указать количество десятков, сотен или тысяч. Например, запись числа 5069 состоит из иероглифов, обозначающих “пять”, “тысяча”, “шесть”, “десять”, “девять”.

Этот принцип напоминает то, как строятся многие числительные в русском языке: пятьдесят обозначает пять десятков; двести — две сотни; а некоторые большие числительные, например, три тысячи, в точности так и устроены. Более того, заметим, что как и в русском языке, если десяток, сотня или тысяча всего одна, то количество дополнительно не указывается, а если их вовсе нет, то не используется и само слово, обозначающее десяток, сотню или тысячу.

Остаётся найти иероглифы, обозначающие 2, 1000, 10 и 7, чтобы составить из них число 2017.

二千十七　2017

$\boxed{\textbf{3}}$ Если написать числа от 6 до 9 под числами от 1 до 4, то станет заметно, что пары чисел, отличающихся на 5, на записи различаются лишь горизонтальной чертой, обозначающей число 5. Если же посмотреть на числа 5 и 10, можно заметить, что они получаются из 1 и 2 поворотом на 90 градусов. Действительно, среди приведённых в задаче чисел есть одно число, получающееся поворотом 4, и другое, получающееся наложением 1 на 10. Таким образом, становится понятно, что в одном знаке записано как бы две цифры, одна означает количество единиц, а вторая, повёрнутая, — количество пятёрок. Зная это легко расшифровать приведённые в задаче знаки: 18, 11, 20, 17, 24.

$\boxed{\textbf{4}}$ В примерах есть три даты с одинаковым числом и разными днями недели в октябре, значит, в приведённых примерах числу соответствует второе слово в записи, а дню недели — четвёртое. Заметим, что слова обозначающие числа и дни недели — однокоренные. Логично предположить, что дни недели “занумерованы” и их названия можно перевести, как “первый день”, “второй день”, и т.д. Однако, если предположить, что первый день — это понедельник, даты не удастся разбить на пары, значит, первый день — не понедельник. Если рассмотреть апрельские даты, то можно понять, что первый день недели у носителей этого языка — суббота.

5 В этой задаче, так же как и в первой, числа образуются как сумма использованных в них маленьких чисел, а связка ko означает сложение. Заметим, что какое-то число, меньшее или равное 9, получается как сумма четырёх tsàqn. tsàqn может быть либо 1, либо 2. Аналогично, n!ànì (которое, в одной из строк повторяется трижды) – это 1, 2 или 3. Если tsàqn — это 1, то tsàqn ko tsàqn ko tsàqn ko tsàqn будет равно 4, но это будет равно tsàqn ko n!ànì, если n!ànì равно 3; или tsàqn ko tsàqn ko n!ànì, если n!ànì равно 2.

Значит, tsàqn — это 2. n!ànì не может быть 1, иначе tsàqn ko n!àn и n!ànì ko n!ànì ko n!ànì оба равны 3. Значит, n!ànì — 3.

Таким образом, мы теперь знаем значение 6 из приведённых записей:

n!ànì ko n!ànì	6
n|è!é	?
tsàqn ko n!ànì	5
tsàqn ko tsàqn ko n!ànì	7
tsàqn ko tsàqn ko tsàqn ko tsàqn	8
n!ànì	3
n!ànì ko n!ànì ko n!ànì	9

Остаются числа 1,2 и 4. Логично предположить, n|è!é — это 1, и записать два оставшихся числа:

tsàqn	2
tsàqn ko tsàqn	4

Листок 6. Для любого существует

$\boxed{\textbf{1}}$ Зрительный зал в кинотеатре разбит на ряды, в каждом из которых одинаковое число мест. Разбейте утверждения на пары, противоположные по смыслу (то есть, в каждой паре всегда должно быть верно ровно одно из двух утверждений вне зависимости от того, как обстоят дела в кинотеатре):

Во всех рядах все места свободны
Во всех рядах все места заняты
В каждом ряду есть свободное место
В каждом ряду есть занятое место
Есть ряд, в котором все места свободны
Есть ряд, в котором все места заняты
Есть ряд, в котором есть свободное место
Есть ряд, в котором есть занятое место

$\boxed{\textbf{2}}$ **а)** Обязательно ли старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек?

б) Обязательно ли лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один или тот же человек?

$\boxed{\textbf{3}}$ Верны ли следующие утверждения:

• Для любого натурального числа существует чётное натуральное число, большее его;

• Для любого натурального числа существует чётное натуральное число, меньшее его;

• Для любого чётного натурального числа существует натуральное число, меньшее его;

• Существует такое натуральное число, что все натуральные числа, большие его — чётные.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Верны ли следующие утверждения:

• Для любого натурального числа существует такое натуральное число, что их сумма чётная;

• Для любого натурального числа существует такое натуральное число, что их сумма нечётная;

• Для любого натурального числа существует такое натуральное число, что их произведение больше их суммы;

• Для любого натурального числа существует такое натуральное число, что их произведение меньше их суммы.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В ряд записаны 10 натуральных чисел.

а) Известно, что сумма любых трёх из них больше тридцати. Обязательно ли сумма всех чисел больше ста?

б) Известно, что сумма любых трёх из них, идущих подряд, больше тридцати. Обязательно ли сумма всех чисел больше ста?

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске записаны три числа. Оказалось, что любое из них в сумме с произведением двух оставшихся даёт один и тот же результат. Обязательно ли все три числа, записанные на доске, равны?

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ В этой задаче важно, чтобы школьники поняли, по какому принципу строится логическое отрицание в математике. Утверждения "все места свободны" и "все места заняты" — не противоположны по смыслу, они могут быть ложны одновременно. Хочется, чтобы школьник сам обнаружил, что при построении отрицания кванторы "для любого" и "существует" меняются на противоположные.

Во всех рядах все места свободны — Есть ряд, в котором есть занятое место

Во всех рядах все места заняты — Есть ряд, в котором есть свободное место

В каждом ряду есть свободное место — Есть ряд, в котором все места заняты

В каждом ряду есть занятое место — Есть ряд, в котором все места свободны

$\boxed{2}$ **а)** Да. Если кто-то является старейшим математиком среди шахматистов, то он и математик, и шахматист, и, кроме того, страше всех математиков-шахматистов. Точно так же старейший шахматист среди математиков будет обладать всеми этими свойствами. Но старейший математик-шахматист может быть только один.

б) Нет, не обязательно. Пусть, например, в мире всего два человека занимаются и математикой и шахматами, причём один из них — хороший математик, но плохой шахматист, а другой — хороший шахматист, но плохой математик. Тогда первый будет лучшим математиком среди шахматистов, а второй — лучшим шахматистом среди математиков.

$\boxed{3}$ Ответы даны в предположении, что натуральные числа начинаются с единицы, а ноль не является натуральным.

• Да. Для любого натурального числа n всегда есть чётное число, большее его, например, $n \cdot 2$.

• Нет. Для числа 1 нет чётных натуральных чисел, меньших его.

• Да. Любое чётное число можно представить в виде $n \cdot 2$, где n — какое-то натуральное число. Это число n будет меньше, чем $2 \cdot n$, так как n больше нуля.

• Нет. Для любого натурального числа n найдётся большее его нечётное число, например $n \cdot 2 + 1$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ • Да. Например, число можно сложить с самим собой.

• Да. Для любого натурального n, возьмём число $n+1$. Их сумма, равная $n \cdot 2 + 1$, нечётна.

• Нет. С единицей любое натуральное число n в сумме даст $n+1$, а в произведении n.

• Да. Для любого числа можно взять единицу.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Да. Есть несколько способов это доказать. Можно рассмотреть утроенную сумму всех чисел и разбить её на тройки. Можно заметить, что есть хотя бы одно число, не меньшее десяти и разбить на тройки оставшиеся девять. Или можно заметить, что не более двух чисел могут быть меньше десяти и объединить их в тройку с каким-то числом.

б) Нет. Например, возьмём такую последовательность: $1, 1, 30, 1, 1, 30, 1, 1, 30,$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Нет. Например, это верно для такой тройки: $1, 1, 2$.

От школьников находить все тройки чисел, удовлетворяющие условию, не требуется, но это можно сделать, составив уравнение. Обозначим числа как a, b, c.

$$a + b \cdot c = b + a \cdot c = c + a \cdot b$$

$$b \cdot c - b - c = a \cdot c - a - c = a \cdot b - a - b$$

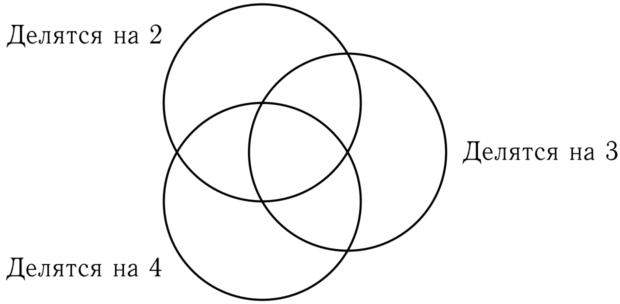
$$(b-1) \cdot (c-1) - 1 = (a-1) \cdot (c-1) - 1 = (a-1) \cdot (b-1) - 1$$

$$(b-1) \cdot (c-1) = (a-1) \cdot (c-1) = (a-1) \cdot (b-1)$$

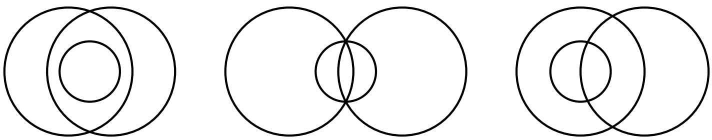
Если ни одна из скобок не равна нулю, то все три числа должны быть равны. Ровно одна скобка нулю быть равна не может, а случай, когда хотя бы две скобки равны нулю даёт второе семейство решений вида $(1, 1, n)$.

Листок 7. Множества

$\boxed{1}$ **а)** Расположите на диаграмме числа 7, 6, 24, 15 и 9 так, чтобы в каждом из кругов оказались те и только те числа, которые обладают указанным рядом с кругом свойством.



б) Укажите на диаграмме из пункта (а) все области, в которые не попадёт ни одно натуральное число. Выберите из трёх диаграмм, изображённых ниже, ту, на которой эти же свойства можно сопоставить кругам так, что всем натуральным числам найдётся место, а пустых областей не будет.



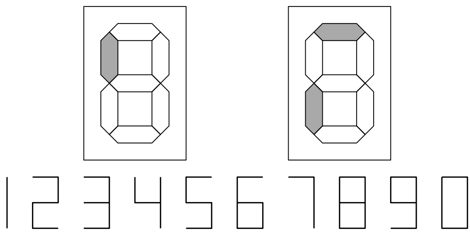
$\boxed{2}$ На доске нарисовали две окружности и отметили 200 точек. Внутри каждой из окружностей оказалось по 120 точек, а внутри их пересечения — 40. Сколько точек не попали ни в одну из окружностей?

$\boxed{3}$ В классе 29 человек. 15 из них занимаются в музыкальном кружке, 21 — в математическом. Сколько человек посещают оба кружка, если известно, что только Вовочка не ходит ни в один из этих кружков?

4 В первом классе читать умеют 12 учеников, считать — 8, писать – 9; читать и писать – 4, читать и считать – 5, писать и считать – 3; читать, писать и считать – 2; и всего лишь 6 ещё ничему из этого не научились. Сколько учеников в классе?

5 Сколько всего существует натуральных чисел от 1 до 300, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

6 У калькулятора, которым пользуется Илья, некоторые лампочки перегорели. Если ввести на нём одну из цифр, то табло будет выглядеть так, как показано на левой картинке. А если ввести другую, то так, как на правой. Восстановите эти две цифры.



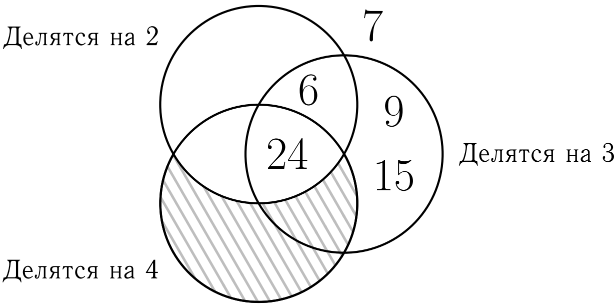
7 В выдуманной стране все жители знают хотя бы один из трёх языков — абвгдейский, ёжзский или ийкский. Абвгдейский знают 80% жителей, ёжзский — 70% жителей, а ийкский — 60%. Каким может быть количество жителей, знающих все три языка?

а) Определите наименьший возможный процент населения.

б) Определите наибольший возможный процент населения.

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Число 7 на диаграмме Эйлера будет находиться вне всех трёх кругов. В заштрихованных областях не может быть чисел, так как все числа, которые делятся на 4, будут делиться и на 2. Из трёх диаграмм Венна для этих трёх множеств подходит правая.



$\boxed{\mathbf{2}}$ Число точек, попавших в первую окружность, но не попавших во вторую, равно $120 - 40 = 80$. Аналогично, число попавших во вторую, но не попавших в первую, тоже равно 80. Если сложить количество точек во всех трёх областях (две рассмотренные выше и пересечение двух окружностей), получится $80 + 80 + 40 = 200$. Значит, вне окружностей точек не будет.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Эта задача, точно так же, как и предыдущая, решается по формуле включений-исключений. Если кто-то из школьников уже знает эту формулу, попросите привести доказательство.

Если сложить количество детей в каждом из кружков и вычесть тех, кто ходит в оба (тех, кого мы “посчитали дважды” при сложении), получится количество школьников, которые ходят хотя бы в один из кружков. Зная это, уже легко вычислить, что ровно 8 человек ходят в оба кружка.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 25 учеников. В этой задаче можно нарисовать круги Эйлера и рассчитать количество попавших в каждую область. Или же вывести формулу включений-исключений для случая трёх множеств:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|$$

Самый простой способ доказать эту формулу — проверить, что каждая из областей будет посчитана ровно один раз. Более наглядно это можно показать, вырезая эти части из бумаги.

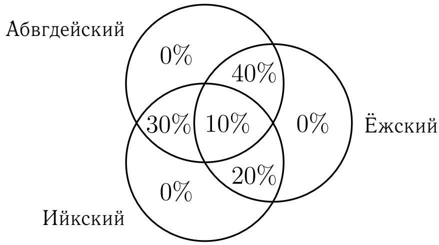
$\boxed{\mathbf{5}}$ 80. Для того, чтобы вычислить их количество, сначала вычислим количество чисел в указанном диапазоне, которые делятся на k для k равного 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Так как каждое из этих чисел является делителем 300, то количество чисел, которые делятся на k равно $\frac{300}{k}$. Остаётся применить формулу включений-исключений.

Вообще говоря, этот же ответ можно получить, заметив, что половина этих чисел делится на два, треть из оставшихся делится на три, а одна пятая остальных делится на пять. Однако, аккуратно это показать не так просто — почему ровно одна пятая из чисел, которые не делятся ни на два, ни на три будет делиться на пять? Можно ли было так сделать, если бы мы рассматривали числа не от 1 до 300, а от 1 до 1000?

Аккуратное решение, не использующее множеств, можно провести, разбив числа от 1 до 300 на десять тридцаток и заметив, что в каждой тридцатке количество чисел, не делящихся ни на два, ни на три, ни на пять будет одинаковым.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Если в одном случае лампочка светится, а в другом — нет, значит, она не может быть перегоревшей, а у числа во втором из этих случаев нету палочки в соответствующем положении. Значит, у первой цифры есть левая верхняя, но нет верхней и левой нижней, а у второй – наоборот. Единственные цифры, обладающие такими свойствам — это 4 и 2.

$\boxed{7}$ **а)** Заметим, что 20% жителей не знают первого языка, 30% не знают второго, а 40% не знают третьего. Количество жителей, которые не знают хотя бы один язык, не может превышать $20\% + 30\% + 40\% = 90\%$. Значит, как минимум 10% знают все три языка. Покажем, что такое значение достигается:



б) Пусть $x\%$ жителей знает ровно 2 языка, тогда

$$|A| + |B| + |C| - x\% - 2 \cdot |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$

$$2 \cdot |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - x\% - |A \cup B \cup C|$$

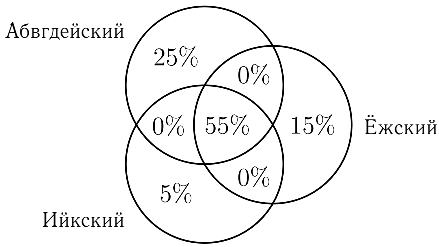
$$2 \cdot |A \cap B \cap C| \leq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \cdot |A \cap B \cap C| \leq 80\% + 70\% + 60\% - 100\%$$

$$2 \cdot |A \cap B \cap C| \leq 110\%$$

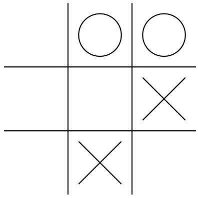
$$|A \cap B \cap C| \leq 55\%$$

Покажем, что такое значение достигается:

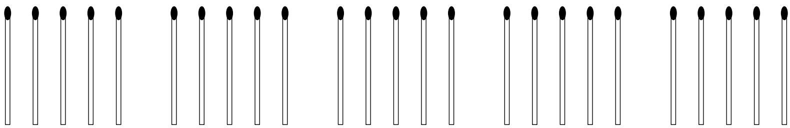


Листок 8. Математические игры

1 На рисунке изображена позиция игры крестики-нолики. Как нужно действовать крестикам, чтобы обязательно выиграть?

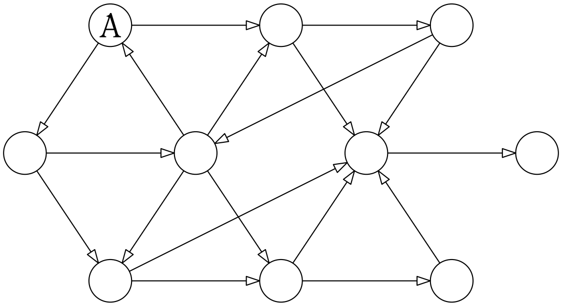


2 На столе лежит 25 спичек. Два игрока по очереди забирают их со стола. За один ход разрешается взять одну, две или три спички. Побеждает тот, кому досталась последняя. Вы ходите первыми, придумайте способ гарантированно обеспечить себе победу.

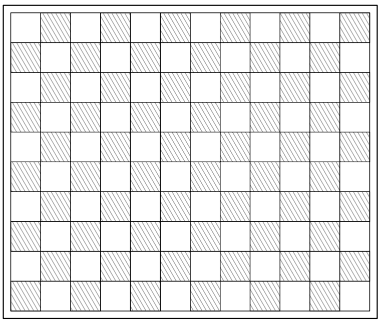


3 Кай и Снежная Королева играют в такую игру: они по очереди переводят остановившиеся часы на два или на три часа вперёд. Тот, кто поставит часовую стрелку на 12, выигрывает. Сейчас ходит Кай, а на часах шесть ровно. Сможет ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе победу и как для этого нужно играть?

4 Изначально фишка находится в кружке, отмеченном буквой A. Каждый из двух игроков в свой ход должен передвинуть фишку из кружка в кружок по одной из стрелок. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков (первый или второй) сможет обеспечить себе победу?

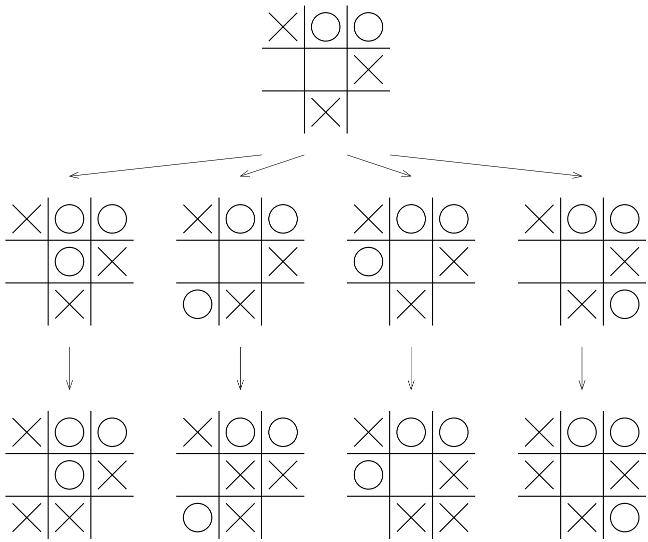


5 В левой нижней клетке шахматной доски 10×12 стоит ладья. Два игрока по очереди перемещают её. Двигать ладью разрешается только вправо и вверх. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Ваш ход первый, придумайте способ обеспечить себе победу.



Ответы и комментарии

1 Первым ходом крестики ходят в левый верхний угол, а вот дальше им предстоить ответить на один из 4 ходов ноликов — важно чтобы школьники разобрали все случаи, иначе описанная стратегия будет неполной. В каждом из 4 случаев у крестиков есть ответный ход, который ставит “вилку”, то есть создаёт два ряда в каждом из которых ровно два крестика — даже если нолики закроют один из них, крестики выиграют, закончив другой.



2 Выигрышная стратегия в этой игре выглядит так: первым ходом нужно взять одну спичку, а затем отвечать на ходы соперника, дополняя его ход до 4: если он взял 3, то брать 1; если он взял 2, то брать 2: если он взял 1, то брать 3. Таким образом после вашего хода количество спичек всегда будет делиться на 4, а после хода соперника — нет. Так как ноль делится на 4, то закончиться спички могут только после вашего хода.

Найти эту стратегию можно при помощи обратной индукции: будем рассматривать всевозможные игровые позиции, начиная с конечных состояний игры, и отмечать их как выигрышные или проигрышные для того игрока, который должен ходить.

Если на столе одна, две или три спички, то тот игрок, который сейчас ходит, выигрывает, если возьмёт их все. Если на столе 4 спички, то какой бы он ни сделал ход, его соперник окажется в выигрышной позиции, которую мы разобрали раньше, а значит, позиция с 4 спичками — проигрышная. Если на столе 5 спичек, то взяв одну мы сможем отправить нашего соперника в проигрышую позицию, а значит, позиция с 5 спичками — выигрышная.

Продолжая увеличивать число спичек, мы сможем разметить все позиции как проигрышные и выигрышные, пользуясь таким принципом: если из позиции есть ход, приводящий к победе или ведущий в проигрышную позицию, то позиция — выигрышная; если все ходы ведут в выигрышные позиции, то позиция — проигрышная. Выигрышная стратегия в итоге заключается просто в том, что всякий раз нужно делать ход, отправляющий соперника в проигрышную позицию.

В процессе заполнения нетрудно заметить закономерность, что проигрышными являются позиции с числом спичек, делящимся на 4. То есть выигрышная стратегия заключается в том чтобы оставшееся после хода число спичек делилось на 4.

$\boxed{\textbf{3}}$ Заметьте, что стрелки можно двигать через отметку в 12 часов и, вообще говоря, игра не обязательно закончится. Правильную стратегию можно получить обратной индукцией или аккуратно перебирая возможные ходы.

Выигрывает Кай, действовать ему нужо так: сдвинуть часы на 2 часа. Если Снежная Королева тоже сдвинет на 2 часа, то сдвинуть на 2 часа и выиграть, если сдвинет на 3 часа, то тоже сдвинуть на 3 часа и после этого два раза отвечать, дополняя до 5: если Снежная Королева сдвигает на 2 часа, то сдвигать на 3, а если на 3 — то на 2.

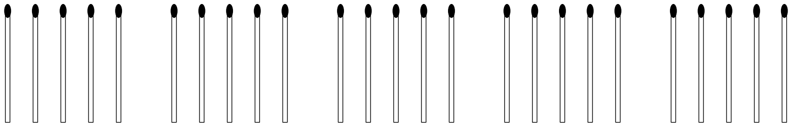
$\boxed{\textbf{4}}$ Проигрышными являются пять позиций — самый правый кружок, из которого никуда не ведут стрелки и четыре кружка но углам. Все остальные позиции — выигрышные. Так как начальная позиция проигрышная, обеспечить себе победу сможет второй игрок.

Заметьте, что в общем случае, в такой игре может быть ничейная ситуация — можно так расставить кружки и стрелки между ними, что ни у одного из игроков не будет выигрышной стратегии, зато у обоих будет стратегия, позволяющая не проиграть за счёт того, что игра будет длиться бесконечно долго.

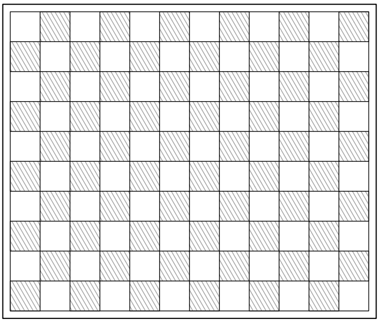
$\boxed{\mathbf{5}}$ Проигрышными являются позиции, лежащие на диагонали, идущей из правой верхней клетки. То есть первым ходом нужно сдвинуть ладью на две клетки вправо, а после этого отвечать симметрично, возвращая ладью на диагональ.

Листок 9. Математические игры – 2

$\boxed{\textbf{1}}$ На столе лежит 25 спичек. Два игрока по очереди забирают их со стола. За один ход разрешается взять одну, две или **четыре** спички. Побеждает тот, кому досталась последняя. Вы ходите первыми, придумайте способ гарантированно обеспечить себе победу.



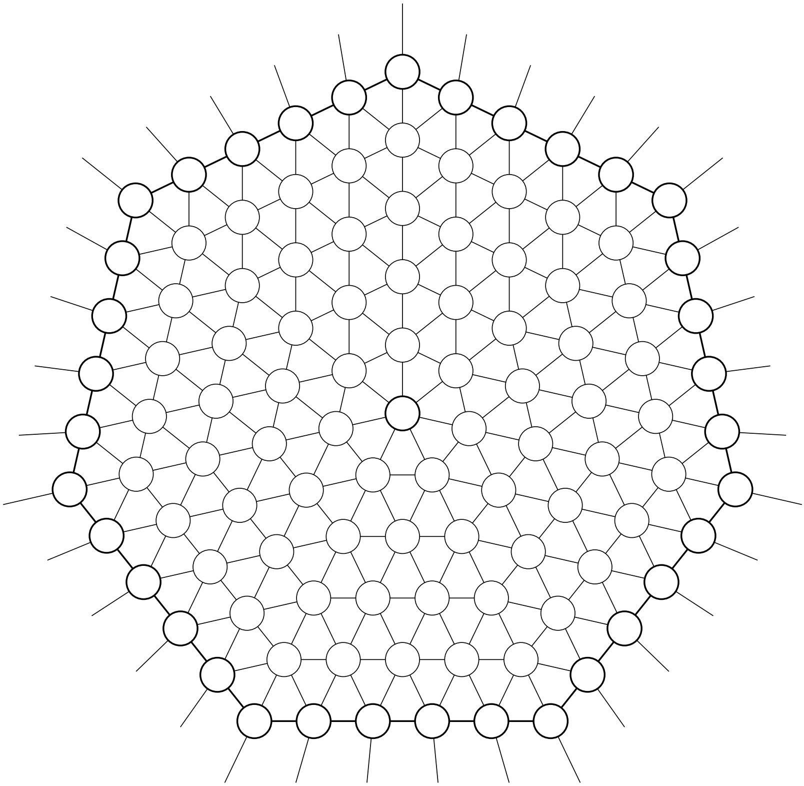
$\boxed{\textbf{2}}$ В левой нижней клетке шахматной доски 10×12 стоит ферзь. Два игрока по очереди перемещают его. Двигать ферзя разрешается только вправо, вверх и вправо-вверх. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Ваш ход первый, придумайте способ обеспечить себе победу.



$\boxed{\textbf{3}}$ В наказание за свои преступления Данаиды — дочери царя Даная — были низвержены олимпийскими богами в Тартар и осуждены вечно осуществлять бессмысленные манипуляции с водой. У них имеются в распоряжении источник воды и три ведра объёмами в 3, 5 и 7 литров. Им требуется отмерить с их помощью 1 литр воды. Но есть небольшая загвоздка — после каждых двух переливаний, которые они совершают (наполнение и опорожнение ведра считается за переливание), боги Олимпа выливают воду из одного из вёдер (из любого непустого ведра на свой выбор). Смогут ли Данаиды справиться с задачей, несмотря на козни олимпийцев?

4 Муха сидит в центре паутины, а по её краю перемещается паук. Двигаются они по очереди. За один ход муха может переместиться на любой соседний (соединённый нитью) узел, а паук может сделать не более четырёх таких шагов, но только по узлам на границе паутины. Если муха и паук в какой-то момент окажутся в одном и том же месте, паук съедает муху и выигрывает. Муха выигрывает, если ей удастся выбраться — для этого ей необходимо в начале своего хода оказаться на границе паутины.

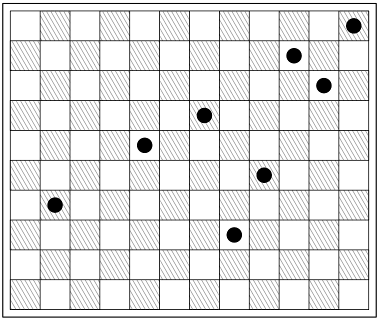
Вы играете за муху, придумайте способ выбраться из паутины.



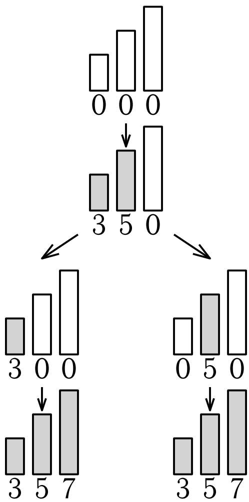
Ответы и комментарии

$\boxed{\textbf{1}}$ Заметьте, что условие отличается от того, что было в предыдущем листке — раньше можно было брать 1, 2 или 3 спички, а теперь 1, 2 или 4. Выигрышная стратегия в этой задаче — брать число спичек такое, что число оставшихся будет делиться на три. Найти её можно тем же способом, что и в задаче из предыдущего листка.

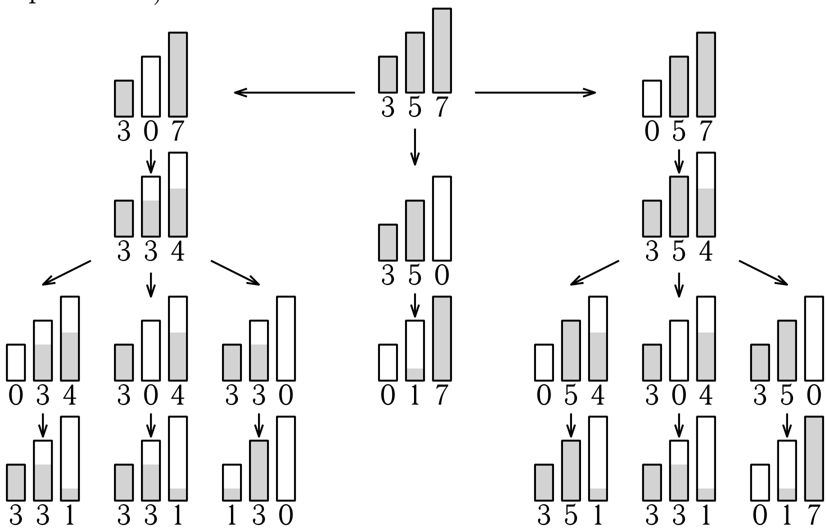
$\boxed{\textbf{2}}$ Проигрышные позиции для этой игры изображены на рисунке ниже чёрными точками.



$\boxed{\textbf{3}}$ Сначала наполним все три ведра водой:

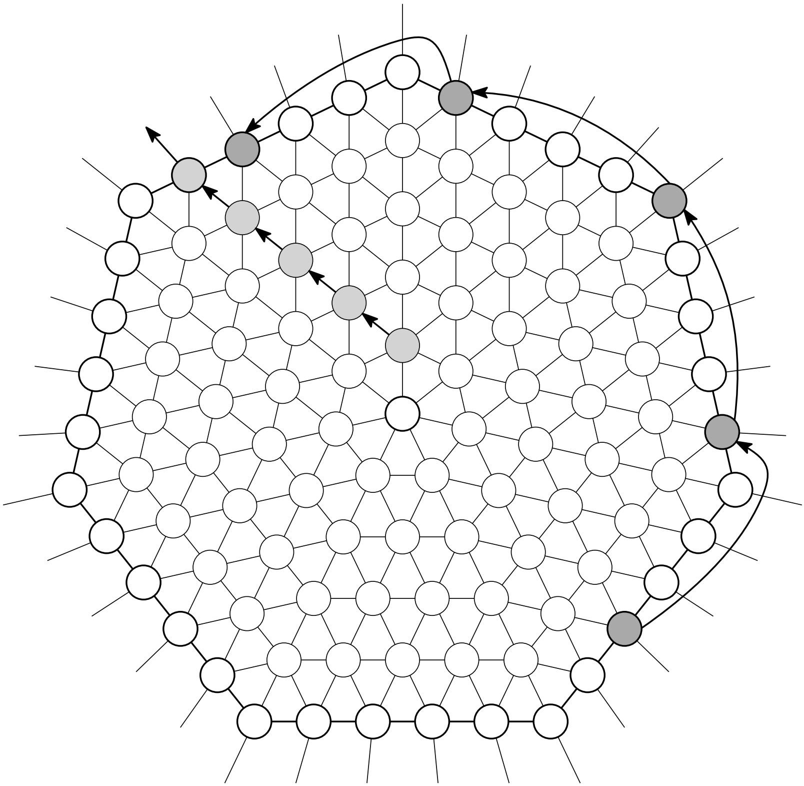


А теперь отмерим один литр воды (после того, как одно из вёдер нам разольют):



$\boxed{\mathbf{4}}$ Мухе нужно действовать следующим образом: сделать один шаг в сторону от центра и начать кружиться по маленькому семиугольнику до тех пор, пока расстоние по внешнему контуру паутины от паука до проекции мухи не окажется после хода паука строго больше 12. Муха сможет добиться этого, так как в сумме растояния по часовой и против часовой стрелки дают 35, проекция мухи каждый ход смещается на 5, а паук — только на 4. Предположим, что перед ходом мухи расстояния были: n — по часовой стрелке и $35 - n$ — против часовой стрелки; причём $n < 13$. Если муха сдвинется против часовой стрелки, расстояния станут $n + 5$ и $35 - n - 5$. После хода паука расстояние от него до мухи будет не менее, чем $n + 1$, так как $35 - n - 5 - 4 = 26 - n > 13 \geq n + 1$. Таким образом, пока расстояние меньше 13, муха может увеличивать его хотя бы на 1 за каждый ход.

После того, как муха набрала дистанцию, ей остаётся добежать до края паутины так, как показано на рисунке:



Листок 10. Немного о себе

1 Царь Пётр отдал придворному брадобрею такой приказ: “брить всех придворных, которые не бреются сами; тех же, кто бреется сам, — не брить”. Сможет ли брадобрей его выполнить?

2 На доске написано сто предложений:
“В этом предложении одна буква.”
“В этом предложении две буквы.”
...
“В этом предложении сто букв.”
Верно ли хотя бы одно из них?

3 Ответьте на вопросы теста так, чтобы все ответы были верными.

1. Ответ, который вы дали на второй вопрос — это: **A.** B **B.** A **C.** D **D.** C	**2.** Ответ, который вы дали на третий вопрос — это: **A.** A **B.** C **C.** B **D.** D	**3.** Ответ, который вы дали на первый вопрос — это: **A.** C **B.** D **C.** B **D.** A

4 Заполните пропуски числами так, чтобы предложение стало верным: “В этом предложении цифра 1 встречается _ раза, цифра 2 — _, цифра 3 — _, а цифра 4 — _ раз”.

5 Заполните пустые клетки таблицы числами так, чтобы под каждой цифрой из первой строки было написано число раз, которое она встречается в этой таблице.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

$\boxed{\mathbf{6}}$ Заполните пропуски так, чтобы оба предложения были истинны. "В следующем предложении цифра 1 встречается _ раза, цифра 2 — _, цифра 3 — _, цифра 4 — _, цифра 5 — _, а цифра 6 — _ раз." "В предыдущем предложении цифра 1 встречается _ раза, цифра 2 — _, цифра 3 — _, цифра 4 — _, цифра 5 — _, а цифра 6 — _ раз."

$\boxed{\mathbf{7}}$ "X дней назад был день недели, в названии которого Y букв."
"Y дней назад был день недели, в названии которого Z букв."
"Z дней назад был день недели, в названии которого X букв."
"Буквами X, Y и Z обозначены различные числа."
В какой день недели все эти условия могут быть выполнены?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В магазине есть 3 компьютера: американский, который всегда отвечает правду, китайский, который всегда врёт, и русский, который отвечает что попало. Перед покупкой разрешается задать один вопрос и получить на него один ответ "да" или "нет" от одного компьютера на ваш выбор. Можно ли задать такой вопрос, чтобы обязательно купить:

а) любой компьютер кроме китайского;

б) любой компьютер кроме русского?

Ответы и комментарии

1 Нет, не сможет. Если брадобрей не станет бриться сам, он нарушит первую часть приказа. Если брадобрей будет бриться сам, то нарушит вторую.

2 Да, ровно одно будет верным. В этом предложении тридцать две буквы. Полезно заметить, что, так как суммарное число букв обязательно больше двадцати, окончание слова буква/буквы/букв зависит только от второй цифры числа.

3 Единственный способ дать ответы так, чтобы все они были верны, такой: 1 – D, 2 – C, 3 – B.

Найти его можно, например, перебирая варианты ответа на первый вопрос.

4 Есть два решения. Первое: 1 — 3 раза; 2 — 1 раз; 3 — 3 раза; 4 — 1 раз. Второе: 1 — 2 раза; 2 — 3 раза; 3 — 2 раза; 4 — 1 раз.

Чтобы упростить перебор вариантов, будет полезно заметить, что если все пропущенные числа однозначные, то их сумма равна 8.

5 Есть два решения.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	3	2	1	1	1	2	1	1	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
11	2	1	1	1	1	1	1	1	1

6 Ответ единственный с точностью до перестановки предложений:
В следующем предложении: 1 — 4 раза; 2 — 2 раза; 3 — 2 раза; 4 — 2 раза; 5 — 1 раз; 6 — 1 раз.
В предыдущем предложении: 1 — 3 раза; 2 — 4 раза; 3 — 1 раз; 4 — 2 раза; 5 — 1 раз; 6 — 1 раз.

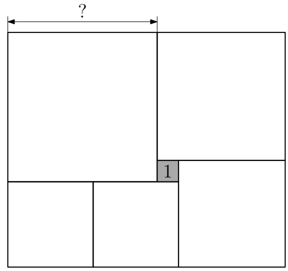
7 Условия будут выполнены в воскресенье, переменные при этом равны пяти, семи и одиннадцати. Для начала заметим, что длины названий дней недели могут быть равны только пяти (среда), семи (вторник, четверг, пятница, суббота) и одиннадцати (понедельник, воскресенье), а так как все три переменные должны быть различны, то один из дней, о которых говорится в предложениях — среда, и она должна быть семь или одиннадцать дней назад. Длины названий дней подойдут только в случае, если среда была одиннадцать дней назад.

$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)** Нельзя. Занумеруем компьютеры, первый — тот, которому задаётся вопрос. Пусть в случае ответа 'да' покупатель берёт компьютер под номером d, а в случае ответа 'нет' — под номером n. Если какое-то из чисел d или n не равно единице, рассмотрим два случая, в которых первый компьютер — русский. В одном из них при каком-то ответе покупатель выберет китайский компьютер. Значит, $d = n = 1$. Но тогда лжец будет куплен, если первый компьютер был китайским.

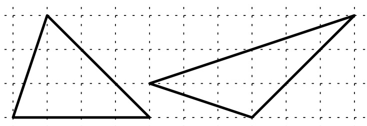
б) Можно. Например, занумеруем компьютеры так же, как и раньше, и зададим вопрос: 'Правда ли, что у русского компьютера номер на один больше, чем у китайского?' Если ответ 'да', берём второй компьютер. Если ответ 'нет' — третий.

Листок 11

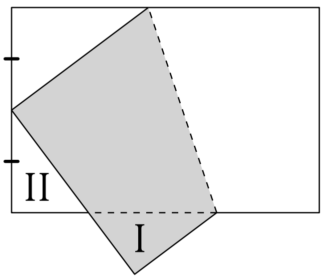
1 На картинке изображены 6 квадратов. Сторона самого маленького квадрата равна одному сантиметру. Найдите сторону самого большого квадрата.



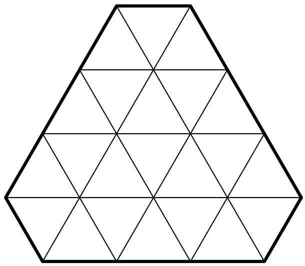
2 На рисунке изображены два треугольных кусочка плавленого сыра. Если мышка может наесться левым из них, хватит ли ей правого, чтобы наесться (*толщина кусочков одинаковая*)?



3 Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны. Оказалось, что треугольники I и II в точности равны друг другу. Найдите длинную сторону прямоугольника, если длина короткой равна 8.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Можно ли разрезать фигуру, изображённую на рисунке, на 11 равных частей по линиям сетки?



$\boxed{\mathbf{5}}$ На доске, разбитой на треугольнички, которая изображена на рисунке, сидит жук. Жук может ходить по доске, перебираясь с треугольничка на любой треугольничек, соседний с ним по стороне. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он может побывать не более одного раза?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Какое наименьшее число прямолинейных разрезов нужно сделать *(после каждого разреза полученные части можно перекладывать как угодно)*, чтобы разрезать на маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$

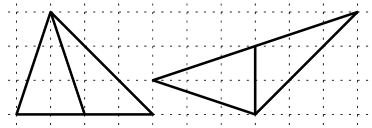
а) куб $3 \times 3 \times 3$;

б) куб $4 \times 4 \times 4$?

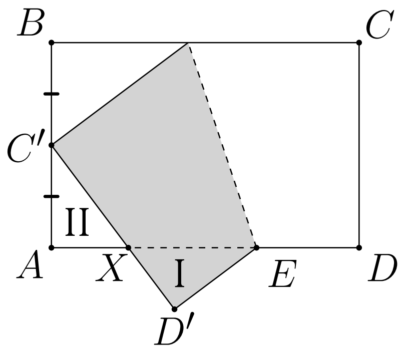
Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть сторона самого большого квадрата равна x. Тогда сторона квадрата справа от него — $x-1$, сторона следующего по часовой стрелке — $x-2$, а стороны двух одинаковых маленьких квадратов равны $x-3$. С другой стороны, сумма сторон двух одинаковых маленьких квадратов на 1 больше стороны большого. Получается, что $2\cdot(x-3)=x+1$. То есть $x=7$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Оба кусочка имеют одинаковую площадь (а значит, и объём, так как толщина одинаковая). Это можно показать даже не зная формулы для вычисления площадей:



$\boxed{\mathbf{3}}$ Обозначим точки так, как показано на картинке.



$AC' = D'E$, так как треугольники равны. Получается, что

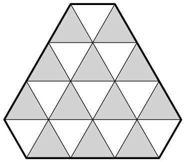
$$ED = ED' = AC' = \frac{1}{2}AB = 4$$

Кроме того, из равенства треугольников следует, что $AX = XD'$ и $XC' = XE$. Используя эти равенства, получаем:

$$AE = AX + XE = XD' + XC' = C'D' = CD = 8$$

Тем самым, $AD = AE + ED = 8 + 4 = 12$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нет, нельзя. Фигура состоит из 22 двух треугольничков, а значит, каждая из одиннадцати частей состоит из двух соседних треугольничков. Если раскрасить треугольнички в два цвета так, как показано на рисунке, то любые два соседних треугольничка должны будут иметь разные цвета. А значит, чтобы фигуру удалось разрезать, белых и чёрных треугольничков должно быть поровну. Но это не так.



$\boxed{\mathbf{5}}$ Используя ту же раскраску, что и в предыдущей задаче, заметим, что, так как каждым своим ходом жук меняет цвет треугольничка, на котором стоит, количество белых и чёрных треугольничков, которые он обошёл, всегда отличается не более, чем на единицу. А значит, хотя бы один чёрный треугольник останется. Легко придумать пример, в котором жук обойдёт все треугольники кроме одного.

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** Очевидно, что шести разрезов хватит. Покажем, что менее чем шестью обойтись не удастся. Рассмотрим кубик, находящийся в центре куба. От него должны быть отрезаны все шесть его соседей. Никакие два из них нельзя отрезать одновременно, а это значит, что потребуется как минимум шесть разрезов.

б) Менее шести разрезов не хватит по тем же соображениям, что и в пункте **а**. Чтобы уложиться в эту оценку, можно действовать, например, так: сначала трижды разрежем кубик пополам вдоль каждого из трёх направлений. Получится 8 кубиков $2 \times 2 \times 2$, каждый из которых легко разделить на кубики $1 \times 1 \times 1$ за три разреза. Так как эти кубики не соединены между собой, то, складывая эти кубики один на другой, этими тремя разрезами можно разделить их все.

Листок 12. Одно за другим

1 В классе 6 человек едят мороженое каждый день, 8 человек едят его через день, а остальные не едят мороженого вообще. Вчера 12 учеников этого класса ели мороженое. Сколько учеников будут есть мороженое сегодня?

2 **а)** Найдите трёхзначное число, состоящее из различных цифр, следующих в порядке возрастания, в названии которого все слова начинаются с одной и той же буквы.

б) Найдите трёхзначное число, которое состоит из одинаковых цифр, но в названии которого все слова начинаются с разных букв.

3 В токарном цехе вытачиваются детали из стальных заготовок, из одной заготовки вытачивается одна деталь. Стружки, оставшиеся после обработки трёх заготовок, можно переплавить и получить ещё одну заготовку.

а) Сколько всего деталей можно сделать из 9 заготовок?

б) А из 14?

в) Сколько нужно взять заготовок, чтобы получить 40 деталей?

4 Читая сочинение, написанное Вовочкой, учительница не выдержала и разорвала сочинение на 4 части. После этого она решила дать ему второй шанс, перечитала один из кусочков, но опять не выдержала и разорвала кусочек на 4 части. Потом она снова дала ему второй шанс, снова перечитала один из кусочков и снова разорвала его на 4 части. Так продолжалось вновь и вновь, пока учительница не обнаружила, что она разорвала сочинение на 40 кусочков. Сколько раз учительница давала Вовочке второй шанс?

5 Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 463, а номер последней записывается теми же цифрами, но в каком-то другом порядке. Какова толщина этого куска, если толщина каждой страницы равна 0.1 мм?

6 Лёша и Ира живут в доме, на каждом этаже которого 9 квартир (в доме один подъезд). Номер этажа Лёши равен номеру квартиры Иры, а сумма номеров их квартир равна 329. Какой номер квартиры у Лёши?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ В сумме за вчера и сегодня те, кто едят мороженое каждый день, съедят два мороженого, а те, кто едят через день — по одному. Всего будет съедено $6 \cdot 2 + 8 = 20$ мороженых. Если вчера было съедено 12, то сегодня будут съедены оставшиеся 8.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Такое число существует ровно одно — это сто сорок семь.
б) Такое число существует ровно одно — это сто одиннадцать.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** 13. Из 9 заготовок получится 9 деталей и стружки от 9 деталей. Из этих стружек получится ещё 3 заготовки. Из этих 3 заготовок получится 3 детали и стружки от 3 деталей. Из этих стружек получится ещё одна заготовка и из неё — ещё одна деталь.

б) 20 деталей. В конце останется 2 стружки, которые уже ни во что не переплавить (разве что если кто-то одолжит стружки от одной детали, которые можно будет вернуть после того, как из заготовки будет выточена ещё одна деталь).

в) 27 заготовок. Меньшего числа не хватит, так как если оценивать “по весу”, то на одну деталь уходит две трети заготовки, а значитнужно не менее, чем $40 \cdot \frac{2}{3} = 26\frac{2}{3}$ детали.

$\boxed{\mathbf{4}}$ При каждом разрывании количество частей увеличивалось на три. Перед тем, как учительница первый раз дала Вовочке второй шанс, частей было 4. Значит, всего количество частей увеличилось на 36. А вторых шансов было $36/3 = 12$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Номер последней страницы должен быть больше номера первой страницы и, кроме того, он должен быть чётным (так как на каждом выпавшем листе две страницы — по одной на каждой стороне). Среди чисел, которые можно получить, переставляя цифры в числе 463, обоим этим условиям удовлетворяет только 634. Значит, выпавших листов $\frac{634-462}{2} = 86$, а толщина выпавшего куска — 8.6 мм.

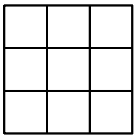
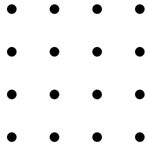
$\boxed{\mathbf{6}}$ Номер лёшиной квартиры — 296, а номер ириной — 33.

Заметим, что если добавить на каждый этаж по одной квартире без номера, а затем перенумеровать все квартиры, считая новые первыми на этаже, а все остальные оставив в том же порядке, в котором они и были, то номера всех квартир увеличатся на номер этажа, квартир на этаже станет 10, а номер лёшиной квартиры станет 329. А это означает, что лёшина квартира находится на 33 этаже.

Вообще говоря, можно просто найти ответ перебором, но тогда нужно обязательно доказать, что это — единственный удовлетворяющий условию ответ. Это нетрудно сделать, достаточно заметить, что при увеличении номера лёшиной квартиры сумма номеров растёт, а при уменьшении – падает, а значит, ни для какого другого номера квартиры сумма не будет равна 329.

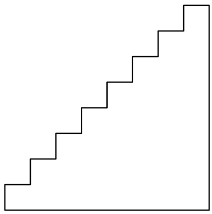
Листок 13. Квадраты и кубы

$\boxed{1}$ **а)** Сколько квадратов изображено на левом рисунке?
б) Сколько квадратов можно изобразить с вершинами в точках на правом рисунке?

$\boxed{2}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что может обклеить без перекрытий всю поверхность куба 6 квадратами: двумя большими 2×2 и четырьмя маленькими 1×1. Возможно ли это сделать?

$\boxed{3}$ Можно ли разрезать изображённую на рисунке: лесенку:
а) на 2 части и сложить из них прямоугольник?
б) на 3 части и сложить из них квадрат?



$\boxed{4}$ Куб $2 \times 2 \times 2$ сложен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Переложите кубики так, чтобы опять получился куб $2 \times 2 \times 2$, но ни один кубик не соприкасался с кубиками, с которыми он соприкасался до перекладывания.

$\boxed{5}$ Придумайте, как разрезать квадрат
а) на 6 меньших по размеру квадратов,
б) на 7 меньших по размеру квадратов,
в) на 8 меньших по размеру квадратов.
(Квадраты не обязательно должны быть одинакового размера)

$\boxed{6}$ Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

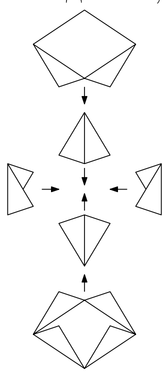
$\boxed{7}$ Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать из него куб с ребром 2, разделённый перегородками на единичные кубики?

Ответы и комментарии

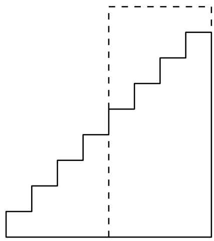
$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** 14 квадратов: 9 квадратов 1×1, 4 квадрата 2×2 и 1 квадрат 3×3.

б) 20 квадратов: 14 из предыдущего пункта, 4 квадрата со стороной $\sqrt{2}$ (под наклоном в 45 градусов) и ещё 2 квадрата со стороной $\sqrt{5}$. От школьников вычислять длины сторон, конечно же, не требуется.

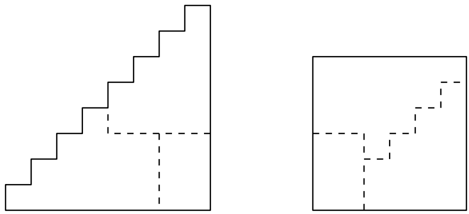
$\boxed{\mathbf{2}}$ Да, можно. Как это можно сделать, показано на рисунке.



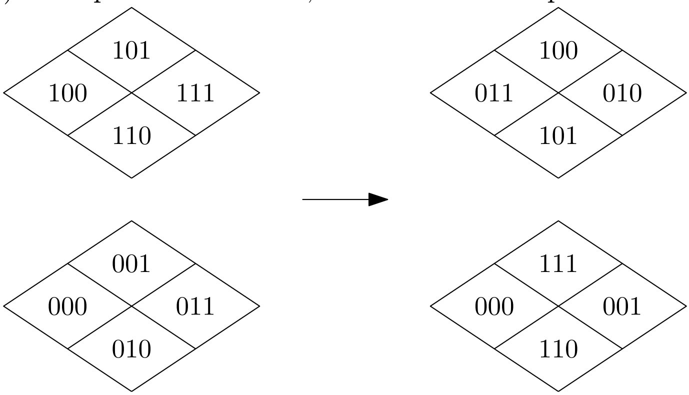
$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Да, можно.



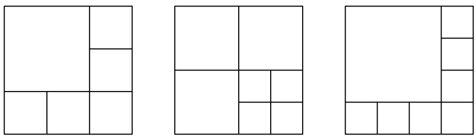
б) Да, можно.



4 Существует несколько способов сделать это, мы приведём лишь один из них. Занумеруем кубики в исходном кубе так, как показано в левой части рисунка (верхний ромб — верхний слой, нижний — нижний). И переложим их так, как показано в правой части.



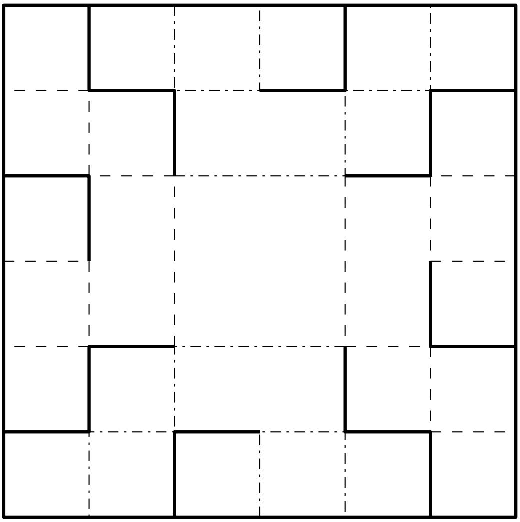
5 Примеры приведены на рисунке:



6 Подсказкой к решению является задача про разорванное сочинение из предыдущего листка. Разрезая один из квадратов на четыре маленьких, мы можем увеличить общее число квадратов на 3. Кроме того, в предыдущей задаче мы уже научились разрезать на 6, 7 и 8 частей. А значит, по индукции результат обобщается на все большие числа.

Если хочется обойтись без явного применения индукции, то, по крайней мере, нужно точно сформулировать алгоритм разрезания: предположим, нам нужно разрезать квадрат на $n \geq 6$ квадратов. Будем вычитать 3 из n, пока не получим 6, 7 или 8 (или просто найдём остаток от деления n на 3). Разрежем на получившееся число квадратов так, как сделали в предыдщей задаче, а затем будем выбирать какой-нибудь квадрат и разрезать его на 4 части, пока не получим нужное число частей.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Это сложная задача, но у неё красивое решение, которое довольно интересно даже просто собрать из бумаги. Сплошными линиями изображены разрезы, пунктирными — сгибы на себя, а штрих-пунктиром — от себя.



Листок 14. Принцесса или тигр?

В одной сказочной стране жил король, к дочерям которого постоянно сватались принцы из соседних государств. Для того чтобы не выдавать своих дочерей за кого попало, король выдумал такое испытание: принцу нужно было угадать, в какой из комнат находится принцесса, а в какой – тигр. Если угадает, то женится на принцессе, а если нет — то его (скорее всего) растерзает тигр. На дверях комнат король вешал таблички со странными утверждениями и давал каждому принцу какую-нибудь подсказку, чтобы тот, если не дурак, смог бы определить, в какой из комнат заперта принцесса.

Во всех задачах этого листочка вам предстоит оказаться на месте принца и отыскать принцессу. Вам даны надписи на табличках, а также условия короля, верны надписи на табличках или нет. При этом не исключено, что в обеих комнатах находятся принцессы, или что в обеих – тигры (если явно не указано иное).

1 Условие: одна из надписей верна, а другая – нет.

I	II
В этой комнате находится принцесса, а в другой сидит тигр.	В одной из этих комнат находится принцесса, а в другой сидит тигр.

2 Условие: либо обе надписи истинны, либо обе ложны.

I	II
В этой или в другой комнате тигр.	Принцесса в другой комнате.

3 Условие: если в левой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, а если тигр – ложно. Для правой комнаты всё наоборот.

I	II
В обеих комнатах принцессы.	В обеих комнатах принцессы.

4 Условие: то же, что и в задаче 3. Но таблички только что изготовили и не успели повесить на двери, поэтому неизвестно, какая из табличек на какой двери должна висеть.

В этой комнате сидит тигр.	В обеих комнатах сидят тигры.

5 Теперь комнат 3, в одной из них сидит принцесса, а в двух других – тигры. Известно, что верных табличек на дверях не более одной.

I	II	III
В этой комнате сидит тигр.	В этой комнате находится принцесса.	Тигр сидит в комнате II.

6 В этой задаче снова 3 комнаты, при этом в одной из них находится принцесса, в другой – тигр, а оставшаяся комната пуста. При этом надпись на двери комнаты, в которой находится принцесса, истинна, надпись на двери, за которой сидит тигр – ложна, а то, что написано на табличке у пустой комнаты, может оказаться как истинным, так и ложным. Задание то же самое: определить, где находится принцесса.

I	II	III
Комната III пуста.	Тигр сидит в комнате I.	Эта комната пуста.

7 В этой задаче целых 9 комнат! При этом только в одной из комнат находится принцесса, в остальных же восьми – либо тигр, либо там вообще никого нет. Условия те же самые, что в задаче 6: надпись на двери комнаты, в которой находится принцесса, истинна, надпись на двери, за которой сидит тигр – ложна, а то, что написано на табличке у пустой комнаты, может оказаться как истинным, так и ложным.

I Принцесса находится в комнате с нечётным номером.	II Эта комната пуста.	III Либо утверждение V истинно, либо утверждение VII ложно.
IV Утверждение I ложно.	V Утверждение II или утверждение IV истинно.	VI Утверждение III ложно.
VII В комнате I принцессы нет.	VIII В этой комнате сидит тигр, а комната IX пуста.	IX В этой комнате сидит тигр, а утверждение VI ложно.

Принц возмутился, что задача неразрешима. Король согласился с ним, но рассказал ему, пуста комната VIII или нет. После этого принц догадался, где принцесса. Догадайтесь и вы.

Ответы и комментарии

Задачи, которые использованы в этом листке, придуманы американским математиком Рэймондом Смаллианом.

$\boxed{1}$ Предположим, что надпись на первой табличке верна. Тогда будут верны обе надписи, а это противоречит условию. Значит, первая надпись ложна, а верна вторая. Тогда в комнатах одна принцесса и один тигр, но принцесса не в первой или тигр не во второй. В обоих случаях это значит, что принцесса во второй, а тигр — в первой.

Обратите внимание, что надпись на первой табличке ложна в том числе и в случае, когда в каждой комнате тигр, или в обеих комнатах принцессы.

$\boxed{2}$ Заметим, что кто бы ни был в первой комнате, одна из надписей будет верна. Если в ней принцесса, то будет верна вторая надпись, если тигр — то первая. Значит, обе надписи не могут быть ложны одновременно. Значит, они обе верны. Принцесса в первой комнате, а во второй — тигр.

$\boxed{3}$ Заметим, что если бы в обеих комнатах были принцессы, то одна из надписей должна была бы быть верной, а другая — ложной. Но надписи на табличках имеют одинаковую истинность, значит, принцессы не в обеих комнатах. Как следствие, надписи на табличках ложны, а значит, в первой комнате — тигр, а во второй — принцесса.

$\boxed{4}$ Посмотрим, на какой из дверей может висеть левая табличка. Если в комнате с этой табличкой находится принцесса, то надпись будет ложной, а если тигр — верной. Значит, левая табличка не может висеть на первой двери, для которой по условию всё наоборот. Следовательно, на первой двери висит правая табличка. В этом случае в первой комнате может быть только тигр (если в ней принцесса, то надпись на табличке должна быть верна, и в обеих комнатах должны быть тигры), а значит, неверно, что в обеих комнатах тигры. Значит, в правой комнате — принцесса.

$\boxed{5}$ Заметим, что кто бы ни был во второй комнате, будет верна надпись на второй или третьей табличке. Значит, на первой табличке написано ложное утверждение, а значит, принцесса в первой комнате (а тигр будет во второй, если вы вдруг хотели найти тигра, а не принцессу).

6 Принцесса не может быть во второй комнате — иначе надпись на ней должна была бы быть верна, то есть тигр был бы во второй комнате, а значит, было бы ложно утверждение на первой табличке и в третьей комнате тоже должен был кто-то быть. В третьей комнате принцессы также быть не может — если она в ней, то комната не пуста и надпись на этой комнате ложна. Значит, принцесса может быть только в первой комнате (тигр в таком случае будет во второй, а третья будет пуста).

7 Предположим, что король сообщил, что 8 комната не пуста. Тогда в ней не может быть принцессы, значит, в ней — тигр. Значит, утверждение на 8 табличке ложно, но первая его часть верна, значит, должна быть ложна вторая. Значит, комната 9 не пуста.

Действуя с 9 комнатой аналогично тому, как мы поступили с 8, получаем, что утверждение 6 истинно. Тогда утверждение 3 ложно. Следовательно, утверждение 5 ложно, а утверждение 7 истинно. Так как утверждение 5 ложно, утверждения 2 и 4 ложны. Так как утверждение 4 ложно, утверждение 1 истинно. Значит, принцесса находится в комнате с нечётным номером.

Утверждения 3, 5 и 9 ложны. Значит, принцесса либо в 1, либо в 7 комнате. Как было замечено ранее, утверждение 7 истинно, а значит, принцесса не в 1 комнате. Получается, что принцесса в 7 комнате.

Вот возможные варианты рассадки тигров и принцессы по комнатам для этого случая:

пусто	тигр	пусто или тигр
пусто или тигр	пусто или тигр	пусто
принцесса	тигр	тигр

Осталось разобраться со случаем, когда король сообщает, что 8 комната пуста. Покажем, что в этом случае принц всё ещё не может определить, где находится принцесса. Достаточно привести любые два корректных решения, в которых принцесса находится в разных комнатах. Например, можно посадить принцессу в 1, 3, 4, 5 или 7 комнату, а все остальные комнаты оставить пустыми (и не забыть проверить, что утверждение на комнате с принцессой — истинно).

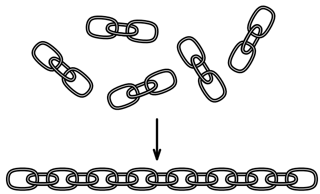
Листок 15. Математический фольклор

1 Сумасшедший учёный, исследуя домашних животных, составил таблицу.

Корова	2
Овца	2
Свинья	3
Собака	3
Кошка	3
Утка	3
Петух	

Определите, по какому принципу она построена, и заполните последнюю клетку.

2 Имеется пять кусков цепи по три кольца в каждом. Какое наименьшее число колец придётся расковать и сковать, чтобы соединить эти куски в одну цепь?



3 По углам квадратного пруда стоят 4 столба. Можно ли расширить его так, чтобы столбы остались на берегу, форма пруда осталась квадратной, а площадь увеличилась вдвое.

4 Четыре кузнеца должны подковать 5 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут, а лошади не могут одновременно оторвать от земли более одной ноги?

5 Есть три одинаковых кубика и верёвка. Как без вычислений отмерить кусок верёвки, равный по длине главной диагонали кубика? *(Главная диагональ две противоположные вершины куба. Она лежит внутри куба и снаружи не видна. Ломать кубики нельзя.)*

6 Имеется 9 монет, одна из которых фальшивая. Все монеты одинаковы на вид, но фальшивая монета немного легче настоящей. Разрешается сделать два взвешивания на чашечных весах без гирь.

а) Можно ли определить, какая из монет фальшивая?

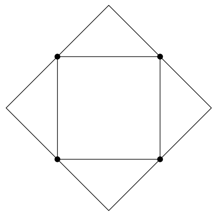
б) Можно ли это сделать, если монет будет 10?

Ответы и комментарии

1 В таблице каждому животному сопоставлено количество букв в записи звука, которое это животное издаёт. В последней строке должно быть число 8.

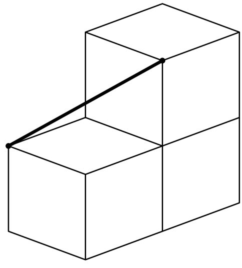
2 Три кольца. Нужно взять один из пяти кусков и расковать все три кольца, из которого он составлен, а затем последовательно соединить четыре оставшихся куска этими тремя кольцами.

3 Да, можно. На рисунке показано, как это сделать.



4 Одновременно подковывать одну лошадь может только один кузнец. Если бы не это ограничение, можно было бы просто посчитать число подков, поделить на число кузнецов и получить, что всего потребуется 25 минут. Осталось только понять, как сделать так, чтобы никто не подковывал одновременно одну и ту же лошадь. А делается это так: первые пять минут кузнецы подковывают всех лошадей кроме первой, следующие пять минут — всех кроме второй, потом всех кроме третьей, и так далее. В результате все лошади будут подкованы, каждой из них подковали 4 ноги.

5 Сделать это можно, например, так, как показано на картинке. Есть и другие, похожие, но менее элегантные способы (например поставить три кубика в ряд, а затем аккуратно вытащить средний).



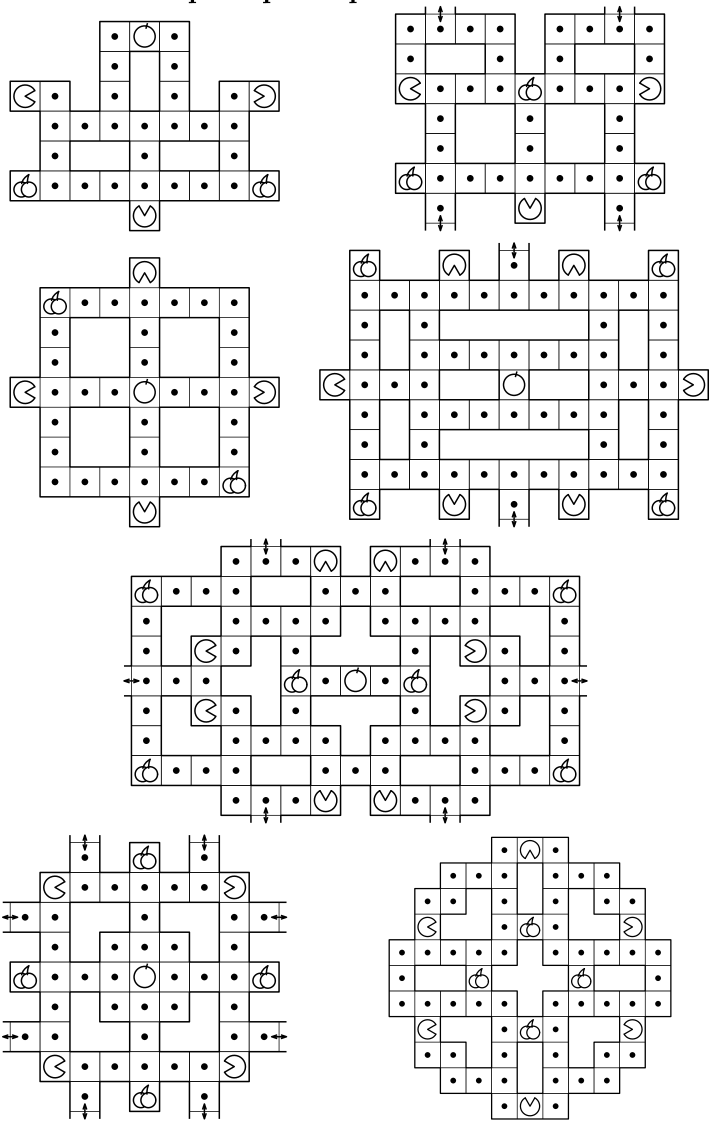
$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** Да, можно. Разобьём монеты на три кучки по три монеты. Первую тройку положим на одну чашку весов, а вторую — на другую. Если одна из чашек оказалась легче, то фальшивая среди тройки, лежащей в этой чашке, если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — одна из трёх оставихся.

Теперь, когда круг подозреваемых сузился до трёх, положим на каждую чашку по одной монете из этой тройки. Если одна из них легче, то она и есть фальшивая, если же чашки уравновесились, то фальшивая монета — это оставшаяся.

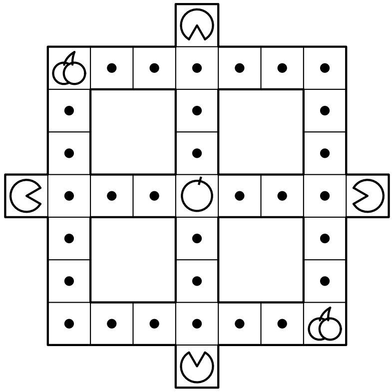
б) Нельзя. Каждое взвешивание может закончиться одним из трёх исходов: "левая чашка тяжелее", "правая чашка тяжелее", "чашки в равновесии". Всего возможных последовательностей результатов взвешиваний — девять. То есть у любого алгоритма взвешиваний после двух взвешиваний есть девять различных состояний, в каждом из которых алгоритм должен дать ответ. Так как возможных ответов больше девяти, в каком-то из этих состояний будет хотя бы два возможных случая. А значит, какой бы ни предполагался в алгоритме ответ, в одном из случаев он будет неверным.

Листок 16. Ом-ном-ном!

Примеры игровых полей:



Правила математической игры "ОМ-НОМ-НОМ"



Каждая из команд управляет круглым голодным всеядным существом, которое перемещается по клеткам игрового поля за счёт сданных командой правильных решений задач. У каждой задачи указана стоимость в баллах — это количество шагов, на которые она позволяет сдвинуться. Эти баллы не накапливаются, их нужно тратить сразу, как только задача успешно сдана.

При перемещении ваш питомец съедает всё, что встречается ему на пути. На клетки, занятые другими игроками, вставать нельзя (но, при определённых условиях, о которых будет рассказано чуть позже, даже и других игроков можно будет съесть!)

На клетках игрового поля можно встретить разные съедобные бонусы:

- Точечки — основной вид еды, каждая съеденная точка добавляет 1 очко к счёту в текущем раунде.

- Вишенка — съев её, ваш питомец становится кровожадным и может есть других игроков. Когда вы съедаете другого игрока, раунд (а заодно и ваш ход) немедленно заканчивается, и вы получаете все очки, набранные съеденным игроком за этот раунд.

- Яблоко — съев его, вы получаете 5 очков к вашему итоговому счёту. Эти очки — "несгораемые", они не переходят к другому игроку, если вас вдруг съедят.

(Продолжение правил — на обороте страницы)

Игра проходит в несколько раундов. Раунд заканчивается в одном из трёх случаев:

1. На поле закончилась еда
2. Кто-то из игроков съеден
3. Время занятия закончилось

Когда раунд закончен, старое игровое поле стирается, и рисуется новое. Набранные за этот раунд очки перечисляются в итоговый счёт команд. Если в закончившемся раунде кого-то съели, он получает утешительный бонус — в новом раунде остальным игрокам запрещается его съедать.

В конце игры победителем становится команда, набравшая наибольшее количество очков.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(1 балл)* Два игральных кубика совместили гранями с одинаковым числом очков. Сумма очков на поверхности получившейся фигуры стала 34. Какие грани совместили?

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(2 балла)* У магистра Йоды обучается 29 падаванов. Из них 15 уже умеют отбивать лазерные лучи световым мечом, а 21 — передвигать предметы с помощью Силы. Сколько падаванов умеют делать и то, и другое, если известно, что среди учеников Йоды только Энакин Скайуокер еще не научился ни тому, ни другому?

$\boxed{\mathbf{3}}$ *(2 балла)* Два рыцаря и несколько лжецов встали в круг так, чтобы каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько могло быть лжецов? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(2 балла)* Заполните доску 8×8 крестиками и ноликами так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(2 балла)* Для нумерации страниц словаря потребовалось 492 цифры. Сколько страниц в словаре?

$\boxed{\mathbf{6}}$ *(3 балла)* Два десятка лимонов стоят столько же рублей, сколько лимонов дают за 500 рублей. Сколько стоит десяток лимонов?

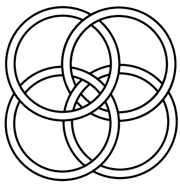
$\boxed{\mathbf{7}}$ *(2 балла)* Маша и Саша, поссорившись, пошли с равными скоростями в противоположные стороны. Через 3 минуты Саша решил помириться и, развернувшись, стал догонять Машу, увеличив скорость в три раза. Сколько пройдёт минут, прежде чем он догонит Машу? (с того момента, когда решил помириться)

$\boxed{\mathbf{8}}$ *(3 балла)* Митя соединил проводами несколько компьютеров. От одного компьютера отходит 4 провода, от трех компьютеров по 3 провода, от четырех — по 2 провода и от одного компьютера — один провод. Сколько всего проводов протянул Митя?

$\boxed{\mathbf{9}}$ *(3 балла)* Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число задумал Вася? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{\mathbf{10}}$ *(3 балла)* Коля и Катя учатся в одном классе. Мальчиков в этом классе в два раза больше, чем девочек. У Коли одноклассников на 7 больше, чем одноклассниц. Сколько одноклассниц у Кати?

$\boxed{\mathbf{11}}$ *(3 балла)* Какое кольцо надо разрезать, чтобы изображённая на рисунке конструкция распалась на отдельные кольца?



$\boxed{\mathbf{12}}$ *(4 балла)* Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из математиков насчитал скамеек в три раза больше, чем другой. А сколько скамеек насчитал третий?

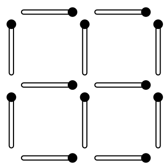
13 *(3 балла)* Игральный кубик кидают дважды. Сколько возможно различных результатов, таких, что хотя бы один раз выпала шестёрка?

14 *(4 балла)* Нарисуйте три кружочка и четыре звёздочки и соедините их непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого кружочка выходило ровно четыре дороги, а из каждой звёздочки — ровно три дороги. Два пункта не могут быть соединены двумя дорогами.

15 *(4 балла)* Найдите углы треугольника, если известно, что градусная мера каждого из них — квадрат натурального числа.

16 *(4 балла)* Бабушка печет блины. Когда в тарелке было 17 блинов, пришел внучек из школы. Как только внук съедает три блина, бабушка подкладывает на тарелку еще два. Маленький обжора ушел в тот момент, когда на тарелке впервые стало ровно 11 блинов. Сколько блинов он съел?

17 *(4 балла)* Клетчатый квадрат 2×2 со стороной клетки в одну спичку складывается из 12 спичек (см. рисунок). А сколько спичек уйдет на клетчатый квадрат 20×20?



18 *(5 баллов)* Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 70, 110, 120, 180 и 230. Чему равна шестая сумма?

$\boxed{\textbf{19}}$ *(4 балла)* В ряд высадили 12 деревьев. Затем между каждыми двумя посаженными деревьями посадили еще по одному дереву. Затем эту операцию проделали еще три раза. Сколько всего деревьев посажено?

$\boxed{\textbf{20}}$ *(5 баллов)* Автомат отрезает от помещенного в него прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника. Применяя несколько раз подряд этот автомат к имеющемуся прямоугольнику, Вася в конце концов разрезал его на 3 больших квадрата, 2 квадрата поменьше и 6 маленьких квадратов со стороной 1 см. Укажите размеры исходного прямоугольника.

$\boxed{\textbf{21}}$ *(5 баллов)* На столе лежит 100 карточек, у каждой из которых одна сторона — белая, а другая — чёрная. Изначально белой стороной вверх были повёрнуты ровно 10 из них. Костя перевернул 30 карточек, затем Таня перевернула 60 карточек, а после этого Оля перевернула 90 карточек. В результате, чёрной стороной вверх оказались повёрнуты ровно 10. Сколько карточек было перевёнуто трижды? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{\textbf{22}}$ *(5 баллов)* В треугольнике длины всех сторон различны и выражаются целым числом сантиметров. Каким, самое меньшее, может быть периметр такого треугольника?

$\boxed{\textbf{23}}$ *(5 баллов)* На доске написано 10-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами, делится на 23 или на 17. Последняя цифра равна 1. Найдите первую цифру числа.

$\boxed{\textbf{24}}$ *(6 баллов)* Найдите наименьшее число, произведение цифр которого равно 2016

$\boxed{\textbf{25}}$ *(5 баллов)* Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя. (В ответе нарисуйте развёртку куба с наклеенными квадратами)

$\boxed{\textbf{26}}$ *(6 баллов)* Найдите все числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании в них последней цифры.

$\boxed{\textbf{27}}$ *(6 баллов)* У Феди есть карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4 — по две с каждой цифрой. Он хочет сложить из них число так, чтобы между двумя единицами была одна цифра, между двойками — две цифры, между тройками — три, а между четвёрками — четыре. Укажите какое-нибудь число, которое может получить Федя.

$\boxed{\textbf{28}}$ *(6 баллов)* Четыре подружки поделили между собой 77 конфет, при этом каждой девочке досталось конфет или столько же, сколько какой-то из её подружек, или ровно в два раза меньше, чем одной из них. Как могли распределиться конфеты? Укажите все возможные варианты

$\boxed{\textbf{29}}$ *(6 баллов)* Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире №333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На всех этажах число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

$\boxed{\textbf{30}}$ *(7 баллов)* На доске выписаны цифры 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Разрешается вставить между некоторыми из них знаки „ + ”, а оставшиеся склеить в числа, так, чтобы сумма оказалась трёхзначным числом (например: “$98 + 76 + 5 + 43 + 2 + 1 = 225$”). Какое наибольшее трёхзначное число может получиться?

Ответы и комментарии

Правила математической игры "ОМ-НОМ-НОМ" версия для преподавателей

Каждая из команд управляет круглым голодным всеядным существом ᗧ, которое перемещается по клеткам игрового поля за счёт сданных командой правильных решений задач. У каждой задачи указана стоимость в баллах — это количество шагов, на которые она позволяет сдвинуться. Эти баллы не накапливаются, их нужно тратить сразу, как только задача успешно сдана. При перемещении питомец съедает всё, что встречается ему на пути.

Подготовка к игре

Вам потребуется заранее подобрать подходящие по сложности задачи и разбить их на несколько блоков. Блоки задач будут одновременно выдаваться всем командам по мере того, как нерешенные задачи заканчиваются.

Так как механика игры достаточно сложная, на проверку решений времени будет мало, а потому лучше всего использовать задачи с проверкой по ответу (и заранее распечатать всем преподавателям ответники).

Крайне желательно, чтобы задачи в каждом блоке варьировались по сложности и цене в баллах; например, первую задачу в блоке можно сделать на один балл дешевле, а последнюю — на один балл дороже (первый блок – 2,3,3,3,3,4; второй блок – 3,4,4,4,4,5 и т.д.). Кроме того, учтите, что в начале игры школьникам нужно разобраться с правилами и немного освоиться, поэтому первый блок лучше всего собрать из относительно лёгких задач, которые школьники точно умеют решать.

Учёт хода игры ведётся на доске. Вам нужно будет место под игровое поле (если вы хотите менять игровое поле от раунда к раунду, то лучше запастись местом под два), текущий и суммарный счёт команд, а также место под отметки для сданных задач.

Перед началом игры разделите школьников на 3-6 команд, каждой команде присвойте номер. Раздайте командам напечатанную версию правил для участников и объясните общую идею игры.

Игровой процесс Сама игра разбита на отдельные раунды. В начале раунда на доске рисуется игровое поле (его можно нарисовать заранее) и раздаются задачи.

Игровое поле — лабиринт, состоящий из клеток, в каждой из которых расположен один из следующих значков: — игрок (постарайтесь нарисовать этот значок достаточно большим, чтобы в него можно было поставить число или пометку, по которой можно понять, какой команде он принадлежит), • — точечка, — вишенка, — яблоко. Кроме того, на некоторых клетках на границе поля можно нарисовать двусторонние стрелочки — порталы, позволяющие переместиться на противоположную часть карты (так, как если бы она была нарисована на развёртке тора). Вы можете придумывать свои игровые поля или взять одно из готовых (примеры игровых полей можно найти в приложении к правилам). Если вы хотите использовать своё поле, постарайтесь сделать так, чтобы команды были примерно в равном положении. Дайте командам выбрать, в какой из отмеченных позиций они будут начинать (преимущество при выборе стоит дать командам с меньшим суммарным числом очков или с меньшим числом участников), отметьте выбранные позиции номерами команд.

Новые блоки задач удобно раздавать в начале раунда, но вы можете сами выбирать, когда их выдать. Например, если какая-то из команд уже решила все или почти все из имеющихся у них задач. Блоки задач не связаны с раундами напрямую, если у кого-то из школьников возникнут сомнения, сообщите, что в любом раунде можно сдавать задачи из любого блока, который уже был выдан.

Сдачу задач организовывается так - один из участников команды подходит к свободному преподавателю (если все преподаватели принимают задачи, то, увы, образуется очередь) и сообщает ему номер своей команды, номер задачи и ответ. Если ответ неверный — ничего не происходит (впрочем, поощрять перебор вариантов не стоит, если кто-то из команд будет пытаться так делать, можно ввести ограничение в три попытки на сдачу задачи, либо начать использовать модифицированные правила, в которых команда преподавателей получает очки за неверные ответы).

Если ответ верный — преподаватель отвечает эту задачу как сданную, а участнику команды, сдавшему задачу, предлагается выбрать, куда дальше переместиться по игровому полю. Число шагов равно количеству баллов, которое стоит задача, использовать их все нужно сразу после того, как задача сдана. При перемещении питомец съедает встречающиеся ему на пути точечки, вишенки и яблоки. Съеденное отмечается в текущем счёте команды. Если съедена вишенка, то питомец становится кровожадным и с этого момента может есть других игроков (можно за баллы от одной сданной задачи съесть вишенку и сразу же съесть другого игрока). Если кто-то кого-то съел, то раунд немедленно заканчивается и, если у команды, которая сейчас ходила, ещё остались баллы за задачу, то эти баллы сгорают. Если кто-то сдал задачу как раз в то время, когда другая команда закончила раунд, баллы, полученные за решение, нужно будет потратить сразу в начале следующего раунда.

Раунд заканчивается в одном из трёх случаев:

1. На поле закончилась еда
2. Кто-то из игроков съеден
3. Время занятия закончилось

Чаще всего раунд будет заканчиваться по причине съедания одной команды другой. В этом случае все съеденные точечки съеденного переходят к съевшему (яблоки остаются у съеденного). В остальных случаях ничего дополнительно не происходит и сразу производится подсчёт очков. Стоимость каждой точечки равна единице, стоимость яблока равна пяти. Вишенки при пдсчёте очков не учитываются. Сумма набранных командой очков в этом раунде прибавляется к общему счёту команды. Если в закончившемся раунде кого-то съели, он получает утешительный бонус — в новом раунде остальным игрокам запрещается его съедать. Этот бонус отмечается значком щита в текущем счёте команды.

Ведение счёта Счёт каждой из команд отмечайте числом и последовательностью съеденной в этом раунде еды. Число — суммарный счёт (за все предыдущие раунды). Строчка с едой — счёт за текущий раунд. Его удобно отмечать как последовательность из съеденных фруктов и палочек за каждую взятую точку (см. рисунок).

Так в конце раунда при пересчёте итоговых очков, будет проще отдать точечки съеденного съевшему, а яблоки оставить. Кроме того, отмечать съеденное палочками намного проще, чем числом, так как результат постоянно меняется, а значки вишенок помогут не запутаться, если вы вдруг забудете пририсовать зубы после перемещения игрока. Значок щита выдаётся съеденной в предыдущем раунде команде — он защищает её от съедания в новом раунде.

Состояние игрового поля изменяется сразу после того, как команда сделала ход. Всем командам должно быть видно счёт, и то, что происходит на поле.

Кроме того, в углу доски отмечайте, какие задачи уже сданы каждй из команд. Школьники могут сами того не заметив, сдать дважды одну и ту же задачу. Не надо строить большую таблицу — это займёт лишнее место и время, достаточно просто записывать номера сданных задач около названий или номеров команд. Если места на доске не хватает, то можно отмечать сданные задачи на листке, но лучше так не делать, так как всем преподавателям будет нужно регулярно сверяться с этой таблицей и делать в ней отметки.

Завершение игры Незадолго до того, как время занятия закончится (или если вы видите, что заканчиваются задачи, потому что они вдруг оказались слишком лёгкими), объявите командам об этом. Когда игра окнчилась, подсчитайте итоговые суммарные очки команд. Победителем становится команда, набравшая наибольшее число очков.

Модификации Здесь приведены несколько вариаций, которые вы можете использовать, если захотите. Однако, они не рекомендуются, особенно, если вы проводите такую игру впервые и у вас нет веских причин их ввести.

1. В игру можно ввести команду преподавателей, которая будет получать по одному баллу за каждый неверный сданный ответ.
2. Можно запретить игрокам поворачивать на 180 градусов во время своего хода.
3. Можно запретить игрокам сдавать задачи из предыдущих раундов.

Правила математической игры "ОМ-НОМ-НОМ"
Q&A

Q: Сколько должно быть команд?

А: Чтобы игра была интересной, должно быть хотя бы 3 команды. Если команд мало, то стоит добавить команду преподавателей — она будет получать баллы не за решение задач, а за неправильные решения, сданные игроками.

Q: Как нарисовать игровое поле?

А: Возьмите поле из примеров или придумайте своё. Не делайте поле слишком большим. Расположите на нём стартовые позиции всех команд (можно дать командам выбрать, в какой из них начинать). Расположите на поле несколько (например, количество команд минус один) вишенок так, чтобы расстояние до ближайшей у всех команд было (примерно) одинаковым. Расположите на поле одно-два яблока. Постарайтесь сделать так, чтобы команды были в равных условиях.

Q: Что означают клетки со стрелочками на картах из примеров?

А: Это — порталы, позволяющие переместиться на противоположную часть карты (так, как если бы она была нарисована на развёртке тора). Обязательно объявите школьникам о том, как они работают, если хотите их использовать.

Q: Нужно ли следить за количеством попыток по задачам?

А: Если в игре участвует команда жюри, то неудачные попытки будут давать ей очки. Если команды жюри нет, то можно ввести ограничение в три попытки на задачу (особенно если кто-то начнёт пытаться перебирать ответы).

Q: Нужно ли отмечать какая команда какие задачи сдала?

А: Да. Школьники могут сами того не заметив, сдать дважды одну и ту же задачу. Отмечать это можно где-нибудь в углу доски или на отдельном листе. Не надо строить большую таблицу — это займёт лишнее место и время, достаточно просто записывать номера сданных задач около названий или номеров команд.

Q: Что если два игрока съели вишенку и столкнулись друг с другом?

А: Съесть другого игрока можно только во время своего хода. Поэтому съедает тот, кто сейчас ходит.

Q: В каком порядке ходят команды?

А: Игроки ходят в том порядке, в котором были сданы задачи. Перемещение по карте делается сразу после того, как сдан правильный ответ на задачу. Откладывать баллы на потом нельзя.

Q: Выдавать ли все задачи сразу?

А: Нет. Сначала выдайте первый блок задач, а новые блоки раздавайте по мере необходимости. Лучше не раздавать новый блок, если на игровом поле опасная ситация — будет обидно отдавать победу просто за то, что команда быстро отыскала лёгкую задачу.

Q: Можно ли сдавать задачи из старых пакетов, когда уже раздали новый или когда начался новый раунд?

А: Да, можно.

Q: Что делать, если игра зашла в патовое положение (командам невыгодно делать ход)?

А: В такой ситуации вы можете досрочно объявить начало нового раунда в нарушение вышеизложенных правил.

Q: Что делать, если команда, сдавшая задачу, не может сделать ход?

А: В таком случае они вынуждены остаться на месте. Выберите карту без тупиков для следующего раунда.

ответник

$\boxed{\mathbf{1}}$ 4

$\boxed{\mathbf{2}}$ 8

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2,3,4

$\boxed{\mathbf{4}}$ проверка по рисунку

$\boxed{\mathbf{5}}$ 200

$\boxed{\mathbf{6}}$ 50

$\boxed{\mathbf{7}}$ 3

$\boxed{\mathbf{8}}$ 11

$\boxed{\mathbf{9}}$ 12

$\boxed{\mathbf{10}}$ 7

$\boxed{\mathbf{11}}$ правое верхнее

$\boxed{\mathbf{12}}$ 7

$\boxed{\mathbf{13}}$ 11

$\boxed{\mathbf{14}}$ проверка по рисунку

$\boxed{\mathbf{15}}$ 100, 64,16

$\boxed{\mathbf{16}}$ 12

$\boxed{\mathbf{17}}$ 840

$\boxed{\mathbf{18}}$ 190

$\boxed{\mathbf{19}}$ 177

$\boxed{\mathbf{20}}$ 45×13

$\boxed{\mathbf{21}}$ только ровно 30

$\boxed{\mathbf{22}}$ 9

$\boxed{\mathbf{23}}$ 4

$\boxed{\mathbf{24}}$ 4789

$\boxed{\mathbf{25}}$ проверка по рисунку

$\boxed{\mathbf{26}}$ 12, 24, 36, 48

$\boxed{\mathbf{27}}$ 41312432 или 23421314

$\boxed{\mathbf{28}}$ $(7, 14, 28, 28); (11, 22, 22, 22)$

$\boxed{\mathbf{29}}$ 3

$\boxed{\mathbf{30}}$ 999