Листок 16. Равенства и неравенства

Во всех задачах ниже латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ обозначены произвольные действительные числа (если не указано иное).

1 Пусть x — произвольное действительное число. Что можно сказать о знаках чисел: $-x$; $x-1$; $1-x$; x^2; $(x-1)^2$; x^3; x^{2n}; x^{2n+1} (n — натуральное число)?

2 **а)** Пусть $a < b$. Верно ли, что $a^2 < b^2$? **б)** Пусть $a^2 < b^2$. Верно ли, что $a^3 < b^3$?

3 Пусть $a < b < c$. Какие из следующих двойных неравенств возможны:
а) $a^2 < b^2 < c^2$; **б)** $b^2 < c^2 < a^2$; **в)** $b^2 < a^2 < c^2$; **г)** $a^2 < c^2 < b^2$; **д)** $c^2 < b^2 < a^2$?.

4 Представьте выражения в виде полных квадратов: **а)** x^2+2x+1; **б)** x^2+6x+9; **в)** $16x^2+8x+1$; **г)** $4u^2-20uv+25v^2$; **д)** $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

5 Докажите неравенства при всех значениях переменных: **а)** $x^2-2x+1 \geqslant 0$; **б)** $-4x^2-4x-1 \leqslant 0$; **в)** $x^2+6x+10 \geqslant 1$; **г)** $(x-y)(y-x+6)-9 \leqslant 0$; **д)** $u^2-2uv+2v^2+2v+2 > 0$.

6 **а)** Докажите неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Когда оно обращается в равенство?
б) Периметр прямоугольника равен 4. Какую наибольшую площадь он может иметь?

7 Решите уравнения: **а)** $(x-1)^2 = 0$; **б)** $(x-1)^2+(2y+5)^4 = 0$; **в)** $x^2 = 1$; **г)** $(x-1)^2 = 1$; **д)** $x^2+6x+8 = 0$.

8 **а)** Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. **б)** Когда оно обращается в равенство?

9 Докажите неравенство: $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$;

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 16. Равенства и неравенства

Во всех задачах ниже латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ обозначены произвольные действительные числа (если не указано иное).

1 Пусть x — произвольное действительное число. Что можно сказать о знаках чисел: $-x$; $x-1$; $1-x$; x^2; $(x-1)^2$; x^3; x^{2n}; x^{2n+1} (n — натуральное число)?

2 **а)** Пусть $a < b$. Верно ли, что $a^2 < b^2$? **б)** Пусть $a^2 < b^2$. Верно ли, что $a^3 < b^3$?

3 Пусть $a < b < c$. Какие из следующих двойных неравенств возможны:
а) $a^2 < b^2 < c^2$; **б)** $b^2 < c^2 < a^2$; **в)** $b^2 < a^2 < c^2$; **г)** $a^2 < c^2 < b^2$; **д)** $c^2 < b^2 < a^2$?.

4 Представьте выражения в виде полных квадратов: **а)** x^2+2x+1; **б)** x^2+6x+9; **в)** $16x^2+8x+1$; **г)** $4u^2-20uv+25v^2$; **д)** $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

5 Докажите неравенства при всех значениях переменных: **а)** $x^2-2x+1 \geqslant 0$; **б)** $-4x^2-4x-1 \leqslant 0$; **в)** $x^2+6x+10 \geqslant 1$; **г)** $(x-y)(y-x+6)-9 \leqslant 0$; **д)** $u^2-2uv+2v^2+2v+2 > 0$.

6 **а)** Докажите неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Когда оно обращается в равенство?
б) Периметр прямоугольника равен 4. Какую наибольшую площадь он может иметь?

7 Решите уравнения: **а)** $(x-1)^2 = 0$; **б)** $(x-1)^2+(2y+5)^4 = 0$; **в)** $x^2 = 1$; **г)** $(x-1)^2 = 1$; **д)** $x^2+6x+8 = 0$.

8 **а)** Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. **б)** Когда оно обращается в равенство?

9 Докажите неравенство: $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$;

Листок 17. Комбинаторика — 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

1 Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:
а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
б) $C_n^1 = C_n^n - 1 = n$;
в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

2 **а)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? **б)** Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? **в)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? **г)** Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом? **д)** Сколько способов из n инопланетян выбрать k инопланетян?

3 На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

4 Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8. Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 **а)** разных, **б)** одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

5 Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

6 Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

7 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 17. Комбинаторика — 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

1 Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:
а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
б) $C_n^1 = C_n^n - 1 = n$;
в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

2 а) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? б) Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? в) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? г) Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом? д) Сколько способов из n инопланетян выбрать k инопланетян?

3 На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

4 Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8. Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 а) разных, б) одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

5 Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

6 Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

7 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть

между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)

$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)**7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

малый мехмат мгу — школе

между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)

$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)**7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Листок 18. Комбинаторика — 2

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:
— в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
— в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
— каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.
Получим такой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}$$

1 **а)** Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).
б) Сколько чисел в 2018–й строке треугольника Паскаля?

2 Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.
Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n, то это верно и для строки с номером $n+1$.

3 **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в n-ой строке?

4 **а)** Поставим знаки ” $+$ ” и ”$-$” между числами в 99–ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак ”$-$”, между вторым и третьим ” $+$ ”, между третьим и четвёртым ”$-$”, потом опять ” $+$ ”, и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100–ой строки. Докажите!

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 18. Комбинаторика — 2

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:
— в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
— в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
— каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.
Получим такой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}$$

1 **а)** Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).
б) Сколько чисел в 2018–й строке треугольника Паскаля?

2 Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.
Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n, то это верно и для строки с номером $n+1$.

3 **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в n-ой строке?

4 **а)** Поставим знаки ” $+$ ” и ”$-$” между числами в 99–ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак ”$-$”, между вторым и третьим ” $+$ ”, между третьим и четвёртым ”$-$”, потом опять ” $+$ ”, и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100–ой строки. Докажите!

5 **а)** Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа n в треугольнике Паскаля в точности равно n. **б)** Докажите, что k-ое число в n-ой строке равно C_n^k.*(Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)*

6 *(Бином Ньютона)* Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a+b)^n$, то для всех $0 \le k \le n$ коэффициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен C_n^k:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

7 Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** 21^4; **б)** 19^4.

8 В разложении выражения $(x+y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n, если известно, что x и y натуральные.

9 С помощью бинома Ньютона докажите, что:
а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;
в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

5 **а)** Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа n в треугольнике Паскаля в точности равно n. **б)** Докажите, что k-ое число в n-ой строке равно C_n^k.*(Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)*

6 *(Бином Ньютона)* Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a+b)^n$, то для всех $0 \le k \le n$ коэффициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен C_n^k:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

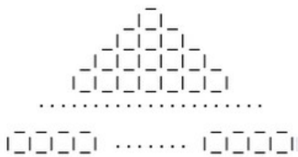
7 Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** 21^4; **б)** 19^4.

8 В разложении выражения $(x+y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n, если известно, что x и y натуральные.

9 С помощью бинома Ньютона докажите, что:
а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;
в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Листок 19. Постепенное конструирование

$\boxed{1}$ **а)** Найдите значение суммы $1+3+5+\dots+(2n-1)$; **б)** Докажите, что $1+2+4+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$.



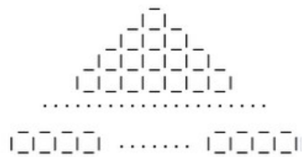
Ограничимся рассмотрением первых n горизонталей. Если переставить левую (по отношению к центральной вертикали) часть пирамидки направо, то получится, как несложно видеть, квадрат $n \times n$. Его площадь равна площади исходной фигуры. Поэтому $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$. **Арифметический способ доказательства.** Докажем, что искомая сумма равна n^2, индукцией по n. Для $n=1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение аерно для любых $k < n+1$. Тогда $1+3+5+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Здесь мы воспользовались предположением индукции. Таким образом, утверждение доказано. **б)** Доказательство проведем индукцией по n. Проверка утверждения для $n=0$ очевидна. Шаг индукции: $1+2+4+\dots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1$. Утверждение пункта **б)** доказано.

$\boxed{2}$ Бодрый студент записывал на лекции по 90 слов в минуту. Сонный студент сначала был совсем сонный, и за первую минуту лекции записал только одно слово. Потом он начал понемногу просыпаться, и за вторую минуту лекции записал уже три слова, за третью — пять, за четвёртую — семь, и так далее. **а)** Сколько времени длилась лекция, если в итоге оба студента записали слов поровну? **б)** Сколько слов записал на лекции каждый студент?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 19. Постепенное конструирование

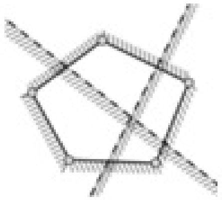
$\boxed{1}$ **а)** Найдите значение суммы $1+3+5+\dots+(2n-1)$; **б)** Докажите, что $1+2+4+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$.



Ограничимся рассмотрением первых n горизонталей. Если переставить левую (по отношению к центральной вертикали) часть пирамидки направо, то получится, как несложно видеть, квадрат $n \times n$. Его площадь равна площади исходной фигуры. Поэтому $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$. **Арифметический способ доказательства.** Докажем, что искомая сумма равна n^2, индукцией по n. Для $n=1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение аерно для любых $k < n+1$. Тогда $1+3+5+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Здесь мы воспользовались предположением индукции. Таким образом, утверждение доказано. **б)** Доказательство проведем индукцией по n. Проверка утверждения для $n=0$ очевидна. Шаг индукции: $1+2+4+\dots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1$. Утверждение пункта **б)** доказано.

$\boxed{2}$ Бодрый студент записывал на лекции по 90 слов в минуту. Сонный студент сначала был совсем сонный, и за первую минуту лекции записал только одно слово. Потом он начал понемногу просыпаться, и за вторую минуту лекции записал уже три слова, за третью — пять, за четвёртую — семь, и так далее. **а)** Сколько времени длилась лекция, если в итоге оба студента записали слов поровну? **б)** Сколько слов записал на лекции каждый студент?

$\boxed{\mathbf{3}}$ У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекают несколько бородатых прямых, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рисунок справа). Эти прямые делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Карточки с числами от 1 до 2017 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить числа на карточках по возрастанию?

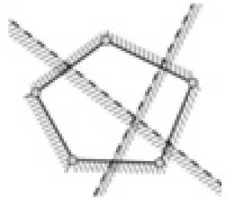
$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, … делятся на 53.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2017 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)** Сколько есть способов разрезать полоску 2×3 на доминошки 1×2? **б)** Тот же вопрос для полосок 2×4 и 2×5. Полоски нельзя переворачивать. **в)** Света посчитала число способов разрезать полоску 2×2018 и вычла из него число способов разрезать полоску 2×2017. А Наташа посчитала число способов разрезать полоску 2×2016. У кого результат вышел больше?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

$\boxed{\mathbf{3}}$ У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекают несколько бородатых прямых, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рисунок справа). Эти прямые делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Карточки с числами от 1 до 2017 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить числа на карточках по возрастанию?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, … делятся на 53.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2017 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)** Сколько есть способов разрезать полоску 2×3 на доминошки 1×2? **б)** Тот же вопрос для полосок 2×4 и 2×5. Полоски нельзя переворачивать. **в)** Света посчитала число способов разрезать полоску 2×2018 и вычла из него число способов разрезать полоску 2×2017. А Наташа посчитала число способов разрезать полоску 2×2016. У кого результат вышел больше?

Листок 20. Раскраски

1 На каждой клетке доски 7×7 сидит жук. **а)** По команде все жуки одновременно переползают на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом хотя бы в одной клетке будет несколько жуков. **б)** По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что после этого найдётся 7 свободных клеток.

2 **а)** Можно ли из квадрата 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2? **б)** Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 (режут по линиям сетки). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

3 На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

4 В квадрате 5×5 без наложений разместили 8 прямоугольников 1×3. Какая клетка могла оказаться не накрытой ни одним прямоугольником? Найдите все возможные варианты.

5 Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

6 У Коли был набор «Юный паркетчик». В нём было несколько квадратиков 2×2 и несколько тетрамино вида «Т». Из набора Коля без наложений складывал доску 12×12 (и лишних паркетинок не оставалось). Коля потерял один квадратик, и в магазине купил вместо него тетрамино вида «Т». Докажите, что теперь Коля не сможет сложить доску 12×12.

7 В каждой клетке фигуры, показанной на рисунке, стоит гиря. Из них 18 гирь — настоящие, весящие одинаково. Две — фальшивые,

Малый мехмат МГУ — школе

Листок 20. Раскраски

1 На каждой клетке доски 7×7 сидит жук. **а)** По команде все жуки одновременно переползают на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом хотя бы в одной клетке будет несколько жуков. **б)** По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что после этого найдётся 7 свободных клеток.

2 **а)** Можно ли из квадрата 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2? **б)** Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 (режут по линиям сетки). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

3 На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

4 В квадрате 5×5 без наложений разместили 8 прямоугольников 1×3. Какая клетка могла оказаться не накрытой ни одним прямоугольником? Найдите все возможные варианты.

5 Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

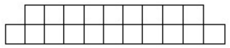
1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

6 У Коли был набор «Юный паркетчик». В нём было несколько квадратиков 2×2 и несколько тетрамино вида «Т». Из набора Коля без наложений складывал доску 12×12 (и лишних паркетинок не оставалось). Коля потерял один квадратик, и в магазине купил вместо него тетрамино вида «Т». Докажите, что теперь Коля не сможет сложить доску 12×12.

7 В каждой клетке фигуры, показанной на рисунке, стоит гиря. Из них 18 гирь — настоящие, весящие одинаково. Две — фальшивые,

они легче настоящих и, возможно, разной массы. Фальшивые гири расположены в соседних по стороне клетках.

Как за три взвешивания на чашечных весах (без других гирь) узнать, в каких клетках расположены фальшивые гири?



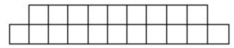
8 На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. В каком наименьшем числе клеток могут оказаться несколько жуков?

9 Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

они легче настоящих и, возможно, разной массы. Фальшивые гири расположены в соседних по стороне клетках.

Как за три взвешивания на чашечных весах (без других гирь) узнать, в каких клетках расположены фальшивые гири?



8 На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. В каком наименьшем числе клеток могут оказаться несколько жуков?

9 Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?

Листок 21. Найди ошибку

1 Докажите, что: **а)** $2+2=5$; **б)** $2\cdot 2=5$.

«Решение». **а)** Очевидно, что $0=0$. Также очевидно, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=0$ и $5\cdot 5-5\cdot 5=0$. Отсюда получаем, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=5\cdot 5-5\cdot 5$. Раскрыв скобки и произведя группировку некоторых слагаемых, получим $2\cdot(5-5)+2\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$, или $(2+2)\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$. Сократим общий множитель и получим, что $2+2=5$, что и требовалось доказать. **б)** Из пункта а) следует, что $2+2=5$, но $2+2=2\cdot 2$. Поэтому $2\cdot 2=5$. □

2 Мальвина сказала Буратино умножить число на 9 и к результату прибавить 15, а Буратино умножил число на 15, а потом прибавил 9, но ответ получил верный. Какое это было число?

«Решение». Обозначим искомое число через x и составим уравнение: $9x+15=15x+9$. Перенесём x вправо, а числа влево. Получим $24=6x$. Отсюда $x=4$. □

3 Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она тратит 1,5 часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 минут. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она будет идти пешком?

«Решение». На путь пешком в оба конца плюс путь на автобусе в оба конца уйдёт столько же времени, сколько на два пути пешком и на автобусе. Поэтому на дорогу туда-обратно пешком Аня потратит $2\cdot 1{,}5-0{,}5=2{,}5$ часа. □

4 Петя с другом пошли в тир. Уговор был такой: Пете даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Петя стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 21. Найди ошибку

1 Докажите, что: **а)** $2+2=5$; **б)** $2\cdot 2=5$.

«Решение». **а)** Очевидно, что $0=0$. Также очевидно, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=0$ и $5\cdot 5-5\cdot 5=0$. Отсюда получаем, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=5\cdot 5-5\cdot 5$. Раскрыв скобки и произведя группировку некоторых слагаемых, получим $2\cdot(5-5)+2\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$, или $(2+2)\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$. Сократим общий множитель и получим, что $2+2=5$, что и требовалось доказать. **б)** Из пункта а) следует, что $2+2=5$, но $2+2=2\cdot 2$. Поэтому $2\cdot 2=5$. □

2 Мальвина сказала Буратино умножить число на 9 и к результату прибавить 15, а Буратино умножил число на 15, а потом прибавил 9, но ответ получил верный. Какое это было число?

«Решение». Обозначим искомое число через x и составим уравнение: $9x+15=15x+9$. Перенесём x вправо, а числа влево. Получим $24=6x$. Отсюда $x=4$. □

3 Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она тратит 1,5 часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 минут. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она будет идти пешком?

«Решение». На путь пешком в оба конца плюс путь на автобусе в оба конца уйдёт столько же времени, сколько на два пути пешком и на автобусе. Поэтому на дорогу туда-обратно пешком Аня потратит $2\cdot 1{,}5-0{,}5=2{,}5$ часа. □

4 Петя с другом пошли в тир. Уговор был такой: Пете даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Петя стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

«Решение». У Пети было патронов на 10 выстрелов, а выстрелил он 34 раза, значит, 24 патрона он получил дополнительно. Заметим, что при каждом попадании общее количество патронов у Пети увеличивается на 2: один патрон он тратит на выстрел, но получает три патрона взамен. Значит, Петя попал в цель $24 : 2 = 12$ раз. $\square$

$\boxed{\textbf{5}}$ Можно ли на доске 10×10 расставить 13 кораблей 1×4 для игры в «морской бой»? Корабли не должны соприкасаться друг с другом ни сторонами, ни углами.

«Решение». Посмотрим, сколько клеточек занимает каждый корабль. Так как он не должен соприкасаться с другими кораблями ни сторонами, ни углами, очертим вокруг него границу шириной в половину клеточки. Таким образом, каждый корабль занимает $4 + 4 + 1 = 9$ клеточек. С другой стороны, доска 10×10 даёт нам $100 + 10 + 10 = 120$ клеточек (с учётом тех самых «границ»). Но $13 \cdot 9 = 117 < 120$. Значит, 13 кораблей расставить можно. $\square$

$\boxed{\textbf{6}}$ В универмаге нарядили несколько новогодних ёлок. На 12 из них есть красные шары, на 11 — жёлтые, на 19 — синие, на 6 — красные и жёлтые, на 8 — красные и синие, на 7 — жёлтые и синие, а на одной — шары всех трёх цветов. Сколько ёлок нарядили в универмаге?

«Решение». Сложим $12 + 11 + 19 = 42$. При этом мы посчитали ёлки, на которых висят шары двух цветов, по два раза. Вычтем их количества из полученной суммы по одному разу: $42 - 6 - 8 - 7 = 21$. Теперь никакие ёлки не посчитаны дважды. Однако теперь получается, что ёлку с шарами всех трёх цветов мы сначала три раза посчитали, а потом три раза вычли, то есть она у нас сейчас не учтена вовсе. Добавив её, получим $21 + 1 = 22$ ёлки. $\square$

$\boxed{\textbf{7}}$ Докажите, что $64 = 65$.

«Решение». Разрежем треугольник с дыркой площадью 64 клетки на части и сложим треугольник без дырки площадью 64 клетки (см. рисунок). Площадь прямоугольного треугольника равна половине

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

«Решение». У Пети было патронов на 10 выстрелов, а выстрелил он 34 раза, значит, 24 патрона он получил дополнительно. Заметим, что при каждом попадании общее количество патронов у Пети увеличивается на 2: один патрон он тратит на выстрел, но получает три патрона взамен. Значит, Петя попал в цель $24 : 2 = 12$ раз. $\square$

$\boxed{\textbf{5}}$ Можно ли на доске 10×10 расставить 13 кораблей 1×4 для игры в «морской бой»? Корабли не должны соприкасаться друг с другом ни сторонами, ни углами.

«Решение». Посмотрим, сколько клеточек занимает каждый корабль. Так как он не должен соприкасаться с другими кораблями ни сторонами, ни углами, очертим вокруг него границу шириной в половину клеточки. Таким образом, каждый корабль занимает $4 + 4 + 1 = 9$ клеточек. С другой стороны, доска 10×10 даёт нам $100 + 10 + 10 = 120$ клеточек (с учётом тех самых «границ»). Но $13 \cdot 9 = 117 < 120$. Значит, 13 кораблей расставить можно. $\square$

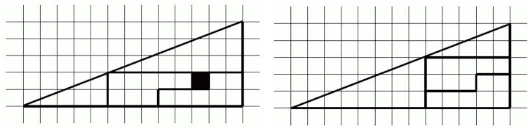
$\boxed{\textbf{6}}$ В универмаге нарядили несколько новогодних ёлок. На 12 из них есть красные шары, на 11 — жёлтые, на 19 — синие, на 6 — красные и жёлтые, на 8 — красные и синие, на 7 — жёлтые и синие, а на одной — шары всех трёх цветов. Сколько ёлок нарядили в универмаге?

«Решение». Сложим $12 + 11 + 19 = 42$. При этом мы посчитали ёлки, на которых висят шары двух цветов, по два раза. Вычтем их количества из полученной суммы по одному разу: $42 - 6 - 8 - 7 = 21$. Теперь никакие ёлки не посчитаны дважды. Однако теперь получается, что ёлку с шарами всех трёх цветов мы сначала три раза посчитали, а потом три раза вычли, то есть она у нас сейчас не учтена вовсе. Добавив её, получим $21 + 1 = 22$ ёлки. $\square$

$\boxed{\textbf{7}}$ Докажите, что $64 = 65$.

«Решение». Разрежем треугольник с дыркой площадью 64 клетки на части и сложим треугольник без дырки площадью 64 клетки (см. рисунок). Площадь прямоугольного треугольника равна половине

произведения длин катетов, то есть сторон, прилежащих к прямому углу. Это следует из того, что такой треугольник составляет половину прямоугольника, стороны которого равны катетам треугольника.



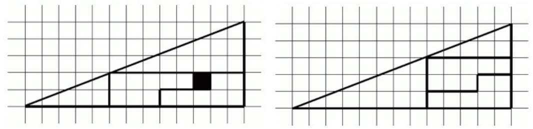
□

8 В воскресенье вечером одноклассники звонили друг другу, чтобы узнать домашнее задание. Известно, что каждый ответил по крайней мере на 10 звонков. Также известно, что никакие два одноклассника не разговаривали друг с другом за вечер больше одного раза. Какое наименьшее количество учеников может быть в классе?

«Решение». Возьмём одного человека. Ему позвонили ещё минимум 10 разных людей (пусть это будут 2-й, 3-й, 4-й, ..., 11-й); итого уже 11 человек. Возьмём второго. Первый ему звонить уже не может — они уже поговорили. Пусть ему позвонят все с 3-го по 11-го — это 9 человек; тогда нужен ещё 12-й, чтобы второму позвонили 10. (Если второму позвонят не все с 3-го по 11-го, то придётся добавить больше новых людей, тогда и общее количество не будет минимальным.) Продолжая эти рассуждения дальше, получим, что требуется минимум 21 человек. □

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

произведения длин катетов, то есть сторон, прилежащих к прямому углу. Это следует из того, что такой треугольник составляет половину прямоугольника, стороны которого равны катетам треугольника.



□

8 В воскресенье вечером одноклассники звонили друг другу, чтобы узнать домашнее задание. Известно, что каждый ответил по крайней мере на 10 звонков. Также известно, что никакие два одноклассника не разговаривали друг с другом за вечер больше одного раза. Какое наименьшее количество учеников может быть в классе?

«Решение». Возьмём одного человека. Ему позвонили ещё минимум 10 разных людей (пусть это будут 2-й, 3-й, 4-й, ..., 11-й); итого уже 11 человек. Возьмём второго. Первый ему звонить уже не может — они уже поговорили. Пусть ему позвонят все с 3-го по 11-го — это 9 человек; тогда нужен ещё 12-й, чтобы второму позвонили 10. (Если второму позвонят не все с 3-го по 11-го, то придётся добавить больше новых людей, тогда и общее количество не будет минимальным.) Продолжая эти рассуждения дальше, получим, что требуется минимум 21 человек. □

Листок 22. Десятичная запись

1 И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Тогда отгадай, какие цифры x, y, z я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой!» Опечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

2 Напишите наименьшее натуральное число, составленное из всех возможных различных цифр и делящееся без остатка на 5.

3 Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4?

4 Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

5 К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

6 Найдите двузначное число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть его последнюю цифру, то получится число в 14 раз меньшее.

7 Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

8 Решите ребус (здесь разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми буквами — одинаковые.):

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 22. Десятичная запись

1 И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Тогда отгадай, какие цифры x, y, z я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой!» Опечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

2 Напишите наименьшее натуральное число, составленное из всех возможных различных цифр и делящееся без остатка на 5.

3 Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4?

4 Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

5 К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

6 Найдите двузначное число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть его последнюю цифру, то получится число в 14 раз меньшее.

7 Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

8 Решите ребус (здесь разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми буквами — одинаковые.):

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\quad AC \\ A \\ \hline BCC \end{array}$$

9 Когда число ПОТОП умножили на 99999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

10 Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

11 Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\quad AC \\ A \\ \hline BCC \end{array}$$

9 Когда число ПОТОП умножили на 99999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

10 Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

11 Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

Листок 23. Оценка+пример

1 Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

2 **а)** 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите: лошадь не может стоять на двух ногах!) **б)** А если кузнецов 48, а лошадей 60?

3 **а)** В магазине приходится взвешивать на весах товары массой в целое число килограммов — от 1 до 15 кг. Какое наименьшее число гирь должно быть для этого в магазине, если гири кладутся на одну чашку весов, а продукты на другую? **б)** А какое наименьшее число гирь должно быть в магазине, где взвешивать нужно товары целой массой от 1 до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки весов?

4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

5 . В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

6 . У каждого из 222 семиклассников школы не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Какое наименьшее количество классов понадобится, чтобы обеспечить бесперебойную работу всех семиклассников?

7 На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Какое минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

8 На какое наибольшее количество разных прямоугольников мож-

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 23. Оценка+пример

1 Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

2 а) 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите: лошадь не может стоять на двух ногах!) б) А если кузнецов 48, а лошадей 60?

3 а) В магазине приходится взвешивать на весах товары массой в целое число килограммов — от 1 до 15 кг. Какое наименьшее число гирь должно быть для этого в магазине, если гири кладутся на одну чашку весов, а продукты на другую? б) А какое наименьшее число гирь должно быть в магазине, где взвешивать нужно товары целой массой от 1 до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки весов?

4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: а) в любом квадратике 2×2; б) в любом уголке из трёх клеточек?

5 . В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

6 . У каждого из 222 семиклассников школы не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Какое наименьшее количество классов понадобится, чтобы обеспечить бесперебойную работу всех семиклассников?

7 На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Какое минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

8 На какое наибольшее количество разных прямоугольников мож-

но разрезать по линиям сетки: **а)** прямоугольник 5×6 клеточек; **б)** прямоугольник 12×6 клеточек; **в)** прямоугольник 2×36 клеточек?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

но разрезать по линиям сетки: **а)** прямоугольник 5×6 клеточек; **б)** прямоугольник 12×6 клеточек; **в)** прямоугольник 2×36 клеточек?

Листок 24. Линейные функции и графики

Если дети слабые, то в начале занятия можно объяснить как строить график прямой $y = kx + b$, а также как коэффициенты k и b влияют на этот график.

1 При каких k и b график линейной функции $y = kx + b$:
а) проходит через начало координат;
б) проходит через начало координат и точку $M(-1; 3)$;
в) параллелен графику функции $y = 3x + 5$;
г) отсекает на осях координат равные отрезки;
д) является биссектрисой координатного угла третьей четверти;
е) проходит через точки $M(3; 8)$ и $N(4; 8)$;
ж) параллелен прямой $3x + 2y = 7$ и пересекается с прямой MN из п. е) на оси Oy;
з) проходит только через те точки, координаты которых — одного знака;
и) не проходит через точки, обе координаты которых положительны?
Постройте такие графики. В каких пунктах решение не единственно?

2 **а)** При каких k и b графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ не пересекаются? совпадают? пересекаются в одной точке? **б)** В последнем случае найдите абсциссу точки пересечения.

3 При каких a, b, c, d график функции $y = ax + b$ перпендикулярен к графику функции $y = cx + d$?

4 Постройте графики функций: **а)** $y = 5x$; **б)** $y = -3x$; **в)** $y = 5x - 5$; **г)** $y = -3x + 5$; **д)** $y = \frac{1}{3}x$; **е)** $y = -\frac{1}{7}x + 4$.

5 Определите линейные функции по их графикам (см. рис.).

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 24. Линейные функции и графики

Если дети слабые, то в начале занятия можно объяснить как строить график прямой $y = kx + b$, а также как коэффициенты k и b влияют на этот график.

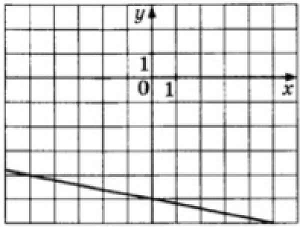
1 При каких k и b график линейной функции $y = kx + b$:
а) проходит через начало координат;
б) проходит через начало координат и точку $M(-1; 3)$;
в) параллелен графику функции $y = 3x + 5$;
г) отсекает на осях координат равные отрезки;
д) является биссектрисой координатного угла третьей четверти;
е) проходит через точки $M(3; 8)$ и $N(4; 8)$;
ж) параллелен прямой $3x + 2y = 7$ и пересекается с прямой MN из п. е) на оси Oy;
з) проходит только через те точки, координаты которых — одного знака;
и) не проходит через точки, обе координаты которых положительны?
Постройте такие графики. В каких пунктах решение не единственно?

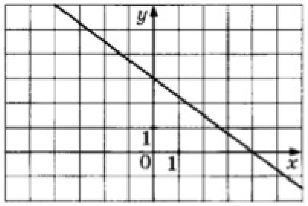
2 **а)** При каких k и b графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ не пересекаются? совпадают? пересекаются в одной точке? **б)** В последнем случае найдите абсциссу точки пересечения.

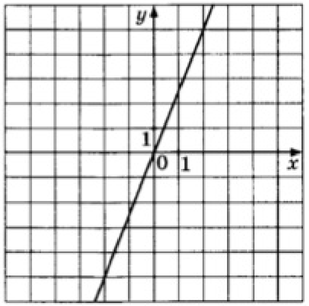
3 При каких a, b, c, d график функции $y = ax + b$ перпендикулярен к графику функции $y = cx + d$?

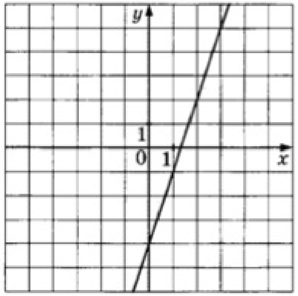
4 Постройте графики функций: **а)** $y = 5x$; **б)** $y = -3x$; **в)** $y = 5x - 5$; **г)** $y = -3x + 5$; **д)** $y = \frac{1}{3}x$; **е)** $y = -\frac{1}{7}x + 4$.

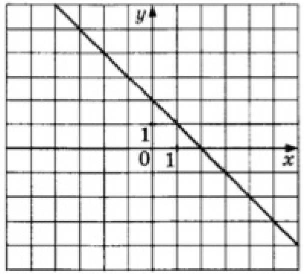
5 Определите линейные функции по их графикам (см. рис.).

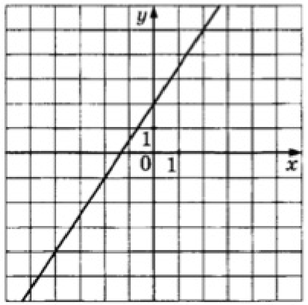
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

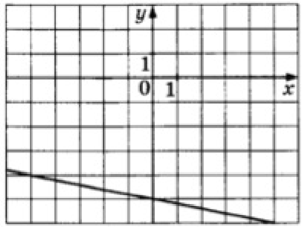
е) 

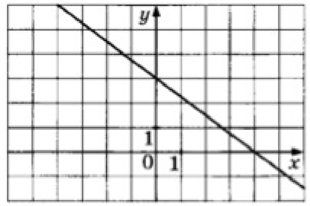
$\boxed{6}$ Изобразите все точки на плоскости (x, y), для которых: **а)** $x = 5$; **б)** $x + y = 2$; **в)** $x \geqslant y$; **г)** $x \geqslant y + 3$; **д)** $x + y \geqslant 3$; **е)** $2x \leqslant y$; **ж)** $xy = 0$.

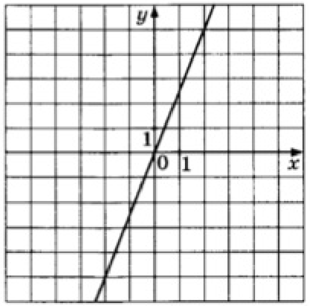
$\boxed{7}$ Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов по Цельсию и Фаренгейту?

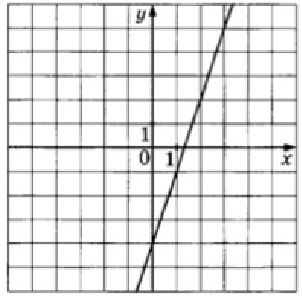
$\boxed{8}$ На каждом рисунке изображены графики двух линейных функций (см. рис.). Могут ли это быть графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$?

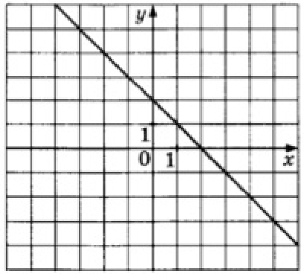
МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

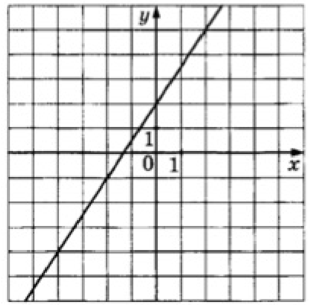
а) 

б) 

в) 

г) 

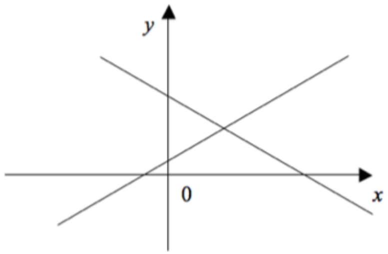
д) 

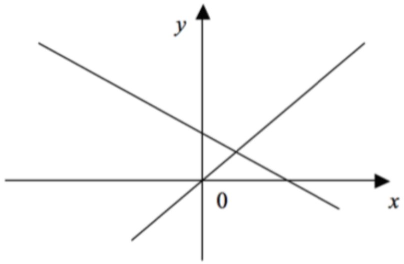
е) 

$\boxed{6}$ Изобразите все точки на плоскости (x, y), для которых: **а)** $x = 5$; **б)** $x + y = 2$; **в)** $x \geqslant y$; **г)** $x \geqslant y + 3$; **д)** $x + y \geqslant 3$; **е)** $2x \leqslant y$; **ж)** $xy = 0$.

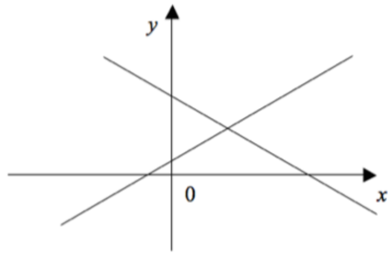
$\boxed{7}$ Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов по Цельсию и Фаренгейту?

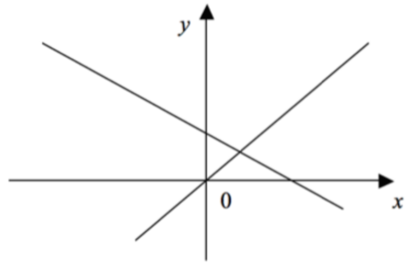
$\boxed{8}$ На каждом рисунке изображены графики двух линейных функций (см. рис.). Могут ли это быть графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$?

а) 

б) 

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

а) 

б) 

Листок 25. Эскалаторы и течения

По этой теме ничего особенного рассказывать не требуется.

1 Однажды человек опаздывал на работу и, чтобы наверстать потерянное в пробке время, побежал вниз по эскалатору метро. Спускаясь со скоростью две ступени в секунду, он насчитал сто сорок ступеней. Через день ситуация повторилась, но теперь ему грозило большее опоздание. Естественно, по тому же эскалатору он бежал быстрее — со скоростью три ступени в секунду, а насчитал на двадцать восемь ступенек больше. Странно получилось: чем быстрее бежишь, тем длиннее эскалатор. Сколько же всего ступенек на нём?

2 Петя сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

3 Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метрополитена за время $t_1 = 3$ минуты, а по движущемуся вверх за $t_2 = 2$ минуты. Сможет ли он подняться по эскалатору, движущемуся с той же скоростью вниз? Если да, то за какое время?

4 Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за время $t_1 = 1$ минута. Если человек будет двигаться относительно эскалатора вдвое быстрее, то он спустится за $t_2 = 45$ секунд. Сколько времени будет спускаться человек, стоящий на эскалаторе?

5 Два человека одновременно вступают на эскалатор с противоположных сторон и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями относительно эскалатора $v = 2$ м/с. На каком расстоянии от входа на эскалатор они встретятся? Длина эскалатора 100 метров, его скорость $u = 1{,}5$ м/с.

6 Эскалатор метро движется со скоростью $v = 1$ м/с. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на ступеньку вперед и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время $t = 70$ с. Через какое время пассажир добрался бы до конца

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 25. Эскалаторы и течения

По этой теме ничего особенного рассказывать не требуется.

1 Однажды человек опаздывал на работу и, чтобы наверстать потерянное в пробке время, побежал вниз по эскалатору метро. Спускаясь со скоростью две ступени в секунду, он насчитал сто сорок ступеней. Через день ситуация повторилась, но теперь ему грозило большее опоздание. Естественно, по тому же эскалатору он бежал быстрее — со скоростью три ступени в секунду, а насчитал на двадцать восемь ступенек больше. Странно получилось: чем быстрее бежишь, тем длиннее эскалатор. Сколько же всего ступенек на нём?

2 Петя сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

3 Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метрополитена за время $t_1 = 3$ минуты, а по движущемуся вверх за $t_2 = 2$ минуты. Сможет ли он подняться по эскалатору, движущемуся с той же скоростью вниз? Если да, то за какое время?

4 Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за время $t_1 = 1$ минута. Если человек будет двигаться относительно эскалатора вдвое быстрее, то он спустится за $t_2 = 45$ секунд. Сколько времени будет спускаться человек, стоящий на эскалаторе?

5 Два человека одновременно вступают на эскалатор с противоположных сторон и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями относительно эскалатора $v = 2$ м/с. На каком расстоянии от входа на эскалатор они встретятся? Длина эскалатора 100 метров, его скорость $u = 1{,}5$ м/с.

6 Эскалатор метро движется со скоростью $v = 1$ м/с. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на ступеньку вперед и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время $t = 70$ с. Через какое время пассажир добрался бы до конца

эскалатора, если бы шел другим способом: делал два шага вперед и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперед и назад одинакова и равна $u = 0{,}5$ м/с. Считать размеры ступеней много меньше длины эскалатора.

7 Моторная лодка прошла 4 километра против течения реки, а затем прошла еще 33 километра по течению реки, затратив на это один час. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 6,5 км/ч.

8 От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю 1/10 часть пути от A до B моторная лодка плыла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка плыла с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани B моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найти собственную скорость (скорость в неподвижной воде) байдарки.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

эскалатора, если бы шел другим способом: делал два шага вперед и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперед и назад одинакова и равна $u = 0{,}5$ м/с. Считать размеры ступеней много меньше длины эскалатора.

7 Моторная лодка прошла 4 километра против течения реки, а затем прошла еще 33 километра по течению реки, затратив на это один час. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 6,5 км/ч.

8 От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю 1/10 часть пути от A до B моторная лодка плыла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка плыла с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани B моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найти собственную скорость (скорость в неподвижной воде) байдарки.

Листок 26. Где больше?

На этом занятии мы будем сравнивать разные множества, не производя при этом большого количества подсчетов. Для этого объекты из разных множеств мы будем разбивать на пары. То множество, в котором элементам не хватило пары, и будет больше. Стоит разобрать простые примеры.

1. Ребят в классе разбивают на пары, в каждой паре есть мальчик и девочка, но трём мальчикам пары не хватило. Кого в классе больше? *Ответ: мальчиков. Так как в парах мальчиков и девочек поровну, но остались «лишние» мальчики.*

2. Каких чисел от 1 до 100 больше: делящихся на 3 или на 5? *Ответ: Делящихся на три. Будем ставить в пару числа вида* $3n$ *и* $5n$, *где* n *— натуральное. Числа вида* $5n$ *закончатся на числе* 100, *а это* $5 \cdot 20$, *а числа вида* $3n$ *— на числе* 99, *это* $3 \cdot 33$. *Значит, останутся «непарные» числа, делящиеся на* 3.

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Каких чисел от 1 до 1000 больше: чётных или нечётных? **б)** Каких чисел больше: четырёхзначных, или пятизначных, делящихся на 10?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Каких шестизначных билетиков больше: содержащих 2 или содержащих 5?(от 000000 до 999999) **б)** Каких шестизначных чисел больше: содержащих 7 или содержащих 0?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Каких делителей больше у числа **а)** 1234567890; **б)** 9078563412: четных или нечетных?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Каких чисел больше от 1 до 1000000: тех, которые имеют ровно три натуральных делителя, или тех, которые имеют ровно два натуральных делителя?

$\boxed{\mathbf{7}}$ На окружности отмечено 2000 синих и одна красная точка. Рас-

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 26. Где больше?

На этом занятии мы будем сравнивать разные множества, не производя при этом большого количества подсчетов. Для этого объекты из разных множеств мы будем разбивать на пары. То множество, в котором элементам не хватило пары, и будет больше. Стоит разобрать простые примеры.

1. Ребят в классе разбивают на пары, в каждой паре есть мальчик и девочка, но трём мальчикам пары не хватило. Кого в классе больше? *Ответ: мальчиков. Так как в парах мальчиков и девочек поровну, но остались «лишние» мальчики.*

2. Каких чисел от 1 до 100 больше: делящихся на 3 или на 5? *Ответ: Делящихся на три. Будем ставить в пару числа вида* $3n$ *и* $5n$, *где* n *— натуральное. Числа вида* $5n$ *закончатся на числе* 100, *а это* $5 \cdot 20$, *а числа вида* $3n$ *— на числе* 99, *это* $3 \cdot 33$. *Значит, останутся «непарные» числа, делящиеся на* 3.

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Каких чисел от 1 до 1000 больше: чётных или нечётных? **б)** Каких чисел больше: четырёхзначных, или пятизначных, делящихся на 10?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Каких шестизначных билетиков больше: содержащих 2 или содержащих 5?(от 000000 до 999999) **б)** Каких шестизначных чисел больше: содержащих 7 или содержащих 0?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Каких делителей больше у числа **а)** 1234567890; **б)** 9078563412: четных или нечетных?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Каких чисел больше от 1 до 1000000: тех, которые имеют ровно три натуральных делителя, или тех, которые имеют ровно два натуральных делителя?

$\boxed{\mathbf{7}}$ На окружности отмечено 2000 синих и одна красная точка. Рас-

сматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?

8 Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2018, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2021. Каких треугольников больше?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

сматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?

8 Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2018, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2021. Каких треугольников больше?

Листок 27. Измерение углов

Это занятие посвящено измерению углов. Здесь много задач о подсчёте углов между стрелками часов в разных ситуациях, а также задач на подсчёт углов с общей вершиной. Особо отметим, что во многих задачах условие допускает несколько случаев (и несколько ответов) — об этом следует предупредить школьников.

-1. Найдите первый момент времени после 9:00, когда стрелки часов образуют угол $156°$.

Теперь напомните теорему о свойствах смежных и вертикальных углов (можно даже с доказательством, потому как оно совсем простое). Напомните также основное свойство измерения углов, если угол делится лучом на несколько частей, то его градусная мера равна сумме градусных мер этих частей. Для некоторых школьников может быть полезным напомнить и определение биссектрисы угла. Теперь разберите задачу **0.**

0. Два угла с величинами $20°$ и $100°$ имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать две другие их стороны?

$\boxed{\textbf{1}}$ Найдите угол между стрелками часов: **а)** в 9:30; **б)** в 10:40.

$\boxed{\textbf{2}}$ После 9:00 часовая и минутная стрелки часов впервые оказались на одной прямой. Что в этот момент показывает секундная стрелка?

$\boxed{\textbf{3}}$ В полдень минутная и часовая стрелки часов совпали. Когда они совпадут в следующий раз? Когда они совпали в предыдущий раз?

$\boxed{\textbf{4}}$ Сейчас стрелочные часы показывают полдень. Когда угол между ними впервые станет равен $90°$? Когда это произойдёт во второй раз?

$\boxed{\textbf{5}}$ Света измерила угол между часовой и минутной стрелками часов. Через полчаса она снова его измерила, и оказалось, что угол не изменился! Чему мог быть равен этот угол, если часы исправны?

$\boxed{\textbf{6}}$ **а)** Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов. **б)** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 27. Измерение углов

Это занятие посвящено измерению углов. Здесь много задач о подсчёте углов между стрелками часов в разных ситуациях, а также задач на подсчёт углов с общей вершиной. Особо отметим, что во многих задачах условие допускает несколько случаев (и несколько ответов) — об этом следует предупредить школьников.

-1. Найдите первый момент времени после 9:00, когда стрелки часов образуют угол 156°.

Теперь напомните теорему о свойствах смежных и вертикальных углов (можно даже с доказательством, потому как оно совсем простое). Напомните также основное свойство измерения углов, если угол делится лучом на несколько частей, то его градусная мера равна сумме градусных мер этих частей. Для некоторых школьников может быть полезным напомнить и определение биссектрисы угла. Теперь разберите задачу 0.

0. Два угла с величинами 20° и 100° имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать две другие их стороны?

1 Найдите угол между стрелками часов: а) в 9:30; б) в 10:40.

2 После 9:00 часовая и минутная стрелки часов впервые оказались на одной прямой. Что в этот момент показывает секундная стрелка?

3 В полдень минутная и часовая стрелки часов совпали. Когда они совпадут в следующий раз? Когда они совпали в предыдущий раз?

4 Сейчас стрелочные часы показывают полдень. Когда угол между ними впервые станет равен 90°? Когда это произойдёт во второй раз?

5 Света измерила угол между часовой и минутной стрелками часов. Через полчаса она снова его измерила, и оказалось, что угол не изменился! Чему мог быть равен этот угол, если часы исправны?

6 а) Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов. б) Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Три луча выходят из одной точки и образуют три угла, каждый из которых меньше развёрнутого. Величина одного из них равна 100°. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Из точки O в указанном порядке выходят лучи OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Из точки O проведены четыре различных луча OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$. Найдите $\angle AOD$.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

$\boxed{\mathbf{7}}$ Три луча выходят из одной точки и образуют три угла, каждый из которых меньше развёрнутого. Величина одного из них равна 100°. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Из точки O в указанном порядке выходят лучи OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Из точки O проведены четыре различных луча OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$. Найдите $\angle AOD$.

Листок 28. Подсчёт двумя способами

1 Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 30, а сумма чисел в каждом столбце равнялась 10?

2 Взяли несколько одинаковых квадратов. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2, 3 и 4 в произвольном порядке. Затем их сложили в стопку. Могла ли сумма чисел в каждом углу оказаться равной 12?

3 Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

4 В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

5 Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.)

6 2017 шаров раскрасили в 7 цветов радуги (каждый шар — в один цвет). На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

7 У Маши есть двухрублёвые и пятирублёвые монеты. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если возьмёт все пятирублёвые — не хватит 60 рублей на пять пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок?

8 Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

9 Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 28. Подсчёт двумя способами

1 Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 30, а сумма чисел в каждом столбце равнялась 10?

2 Взяли несколько одинаковых квадратов. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2, 3 и 4 в произвольном порядке. Затем их сложили в стопку. Могла ли сумма чисел в каждом углу оказаться равной 12?

3 Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

4 В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

5 Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.)

6 2017 шаров раскрасили в 7 цветов радуги (каждый шар — в один цвет). На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

7 У Маши есть двухрублёвые и пятирублёвые монеты. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если возьмёт все пятирублёвые — не хватит 60 рублей на пять пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок?

8 Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

9 Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

10 Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

10 Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

Листок 29. Турниры

1 Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

2 В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе $2-1-0$ команда A набрала 5 очков, B — 2 очка, C — 1 очко. Какое место заняла команда D?

3 В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

4 Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью — два очка и за поражение — одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

5 Вилли, Билли, Бим и Бом провели круговой турнир по шахматам. Известно, что четыре партии было сыграно вничью, а Вилли набрал 0,5 очка. Бим сказал, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могло ли такое быть?

6 Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько партий больше он выиграл, чем проиграл?

7 В однокруговом чемпионате по математическим боям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. В газете написали, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей. Докажите, что журналисты ошиблись.

8 Турнир по боксу проходил по «олимпийской системе» (в каждом круге проигравшие выбывают). Сколько боксёров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграло боёв больше, чем проиграло?

9 В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Более сильный

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 29. Турниры

1 Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

2 В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе $2-1-0$ команда A набрала 5 очков, B — 2 очка, C — 1 очко. Какое место заняла команда D?

3 В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

4 Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью — два очка и за поражение — одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

5 Вилли, Билли, Бим и Бом провели круговой турнир по шахматам. Известно, что четыре партии было сыграно вничью, а Вилли набрал 0,5 очка. Бим сказал, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могло ли такое быть?

6 Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько партий больше он выиграл, чем проиграл?

7 В однокруговом чемпионате по математическим боям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. В газете написали, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей. Докажите, что журналисты ошиблись.

8 Турнир по боксу проходил по «олимпийской системе» (в каждом круге проигравшие выбывают). Сколько боксёров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграло боёв больше, чем проиграло?

9 В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Более сильный

всегда побеждает более слабого. Можно ли не более чем за 70 боёв выявить двух сильнейших?

10 Пять футбольных команд сыграли турнир в один круг. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а все очки, набранные в матчах с ней, аннулировали. Могла ли команда, сначала занимавшая чистое первое место, стать абсолютно последней?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

всегда побеждает более слабого. Можно ли не более чем за 70 боёв выявить двух сильнейших?

10 Пять футбольных команд сыграли турнир в один круг. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а все очки, набранные в матчах с ней, аннулировали. Могла ли команда, сначала занимавшая чистое первое место, стать абсолютно последней?

Листок 30. Эйлеровы графы

Определение. *Граф* — это множество вершин и рёбер (отрезков, соединяющих две вершины.

Определение. *Путём* в графе называется последовательность вершин (необязательно всех различных), в которой каждые соседние вершины соединены ребром.

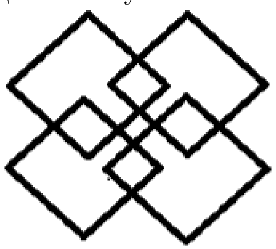
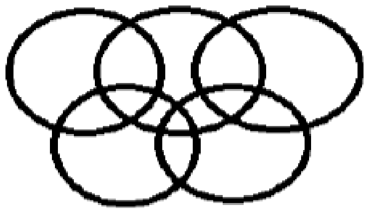
Определение. *Степенью вершины* графа называется число рёбер, выходящих из неё. Если это количество нечётно, то вершина называется нечётной, иначе — чётной.

Определение. *Циклом* в графе называется последовательность вершин, последовательно соединённых рёбрами и начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.

Определение. Путь, содержащий все рёбра графа, причём проходящий по каждому из них ровно один раз, называется *эйлеровым путём.*

Определение. *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. **Определение.** Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.

$\boxed{\textbf{1}}$ Нарисуйте фигуры, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.

$\boxed{\textbf{2}}$ В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбараме, если

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Листок 30. Эйлеровы графы

Определение. *Граф* — это множество вершин и рёбер (отрезков, соединяющих две вершины.

Определение. *Путём* в графе называется последовательность вершин (необязательно всех различных), в которой каждые соседние вершины соединены ребром.

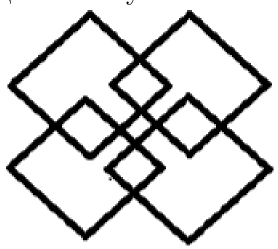
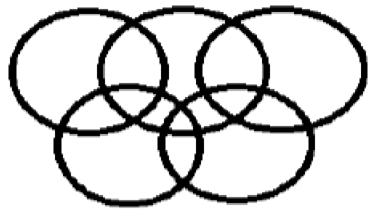
Определение. *Степенью вершины* графа называется число рёбер, выходящих из неё. Если это количество нечётно, то вершина называется нечётной, иначе — чётной.

Определение. *Циклом* в графе называется последовательность вершин, последовательно соединённых рёбрами и начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.

Определение. Путь, содержащий все рёбра графа, причём проходящий по каждому из них ровно один раз, называется *эйлеровым путём.*

Определение. *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. **Определение.** Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.

$\boxed{\textbf{1}}$ Нарисуйте фигуры, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.

$\boxed{\textbf{2}}$ В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбараме, если

а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;

б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;

в) он начал путь в другом городе и n чётно;

г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

3 **Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах.** Через город Кёнигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

4 Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

5 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

6 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

7 Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

8 Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

9 Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

10 При каких n правильный n-угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги и не проводя повторно по нарисованным отрезкам?

11 Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;

б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;

в) он начал путь в другом городе и n чётно;

г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

3 **Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах.** Через город Кёнигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

4 Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

5 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

6 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

7 Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

8 Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

9 Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

10 При каких n правильный n-угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги и не проводя повторно по нарисованным отрезкам?

11 Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Диагностическая работа

1 Таня ехала в пятом вагоне с конца поезда, а Маша — в шестом с начала. Сколько вагонов было в поезде, если Таня и Маша ехали в соседних вагонах?

2 Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

3 В выборах участвуют 10 разных кандидатов. Сколькими способами можно заполнить избирательный бюллетень, отметив в нём ни одного, одного или нескольких (можно даже всех) кандидатов?

4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

5 При каких k и b график линейной функции $y = kx+b$ параллелен прямой $2x + 3y = 5$ и проходит через точку $(0; -3)$?

6 Назовём *креативными* все натуральные числа, в которых сумма каждых двух цифр, стоящих через одну, делится на 5. Сколько существует шестизначных креативных чисел, оканчивающихся на 6?

7 Найдите наименьшее значение выражения $x^2+2x+4y^2+4y+5$.

8 Биссектриса треугольника образует с его сторонами углы $30°$ и $45°$. Найдите углы треугольника.

9 Назовём натуральное число *возрастающим*, если каждая его цифра, начиная со второй, больше предыдущей. Каких возрастающих чисел больше: 4-значных или 5-значных, и на сколько? Число не может начинаться с нуля.

10 В футбольном турнире участвовало пять команд. Каждая пара команд должна была сыграть ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями часть игр отменили. Оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно, если за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

Диагностическая работа

1 Таня ехала в пятом вагоне с конца поезда, а Маша — в шестом с начала. Сколько вагонов было в поезде, если Таня и Маша ехали в соседних вагонах?

2 Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

3 В выборах участвуют 10 разных кандидатов. Сколькими способами можно заполнить избирательный бюллетень, отметив в нём ни одного, одного или нескольких (можно даже всех) кандидатов?

4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

5 При каких k и b график линейной функции $y = kx+b$ параллелен прямой $2x + 3y = 5$ и проходит через точку $(0; -3)$?

6 Назовём *креативными* все натуральные числа, в которых сумма каждых двух цифр, стоящих через одну, делится на 5. Сколько существует шестизначных креативных чисел, оканчивающихся на 6?

7 Найдите наименьшее значение выражения $x^2+2x+4y^2+4y+5$.

8 Биссектриса треугольника образует с его сторонами углы $30°$ и $45°$. Найдите углы треугольника.

9 Назовём натуральное число *возрастающим*, если каждая его цифра, начиная со второй, больше предыдущей. Каких возрастающих чисел больше: 4-значных или 5-значных, и на сколько? Число не может начинаться с нуля.

10 В футбольном турнире участвовало пять команд. Каждая пара команд должна была сыграть ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями часть игр отменили. Оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно, если за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0?